Quesito 4

Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo [0, 2] viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

Quale sarà il valore medio dei numeri generati?

Qual è la probabilità che il primo numero generato sia $\frac{4}{3}$?

Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?

Svolgimento

Il valore medio dei numeri generati è dato dalla relazione:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Sostituendo si ottiene:

$$\frac{1}{2-0}\int_0^2 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3\right)dx =$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^3}{2} - \frac{3x^4}{16}\right)\Bigg|_0^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{2} - \frac{3\cdot 16}{16}\right) = \frac{1}{2}(4-3) = \frac{1}{2}$$

La probabilità che il primo numero generato sia $\frac{4}{3}$ è uguale a zero perché un singolo valore corrisponde all'intervallo di ampiezza zero. (L'area di un segmento nullo vale zero).

Calcoliamo la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1:

$$P(X < 1) = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3\right)dx =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{3x^4}{16}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{8-3}{16} = \frac{5}{16}$$

Il fatto che sia il secondo numero estratto non influisce sul risultato perché un numero casuale fornito da un generatore è una variabile aleatoria senza memoria: il valore di un numero estratto non dipende dal valore dei numeri sorteggiati precedentemente.

Matilde Consales