Quesito 6

Determinare il numero reale a in modo che il valore:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^a}$$

Sia un numero reale non nullo.

Svolgimento

Ci sono due modi per risolvere questo esercizio.

MODO 1 applicando il teorema di de l'Hopital.

Il limite presenta una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applichiamo il teorema di de l'Hopital (ricordiamo che dobbiamo fare la derivata prima del numeratore e del denominatore):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^a} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{a x^{a-1}} =$$

Troviamo di nuovo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ applichiamo nuovamente il teorema di de l'Hopital:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{a(a-1)x^{a-2}} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{a(a-1)} \frac{\sin x}{x^{a-2}}$$

Ricordando che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Si conclude che il limite dato esiste finito se:

$$a - 2 = 1 \quad \rightarrow \quad a = 3$$

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-1}{3 \cdot 2} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}$$

MODO 2 usando lo sviluppo in serie di MC Lauren

Possiamo usare lo sviluppo in serie di Mc Lauren della funzione seno perché:

$$\sin x \rightarrow 0 \;\; per\; x \rightarrow 0$$

In un intorno di *x=0* si trova:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Sostituiamo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^a} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^a} =$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x^3}{6x^a}$$

Si vede che il limite esiste finito se $a=3$. Calcoliamolo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x^3}{6x^3}=-\frac{1}{6}$$

Matilde Consales