Quesito 7

Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti al piano π di equazione:

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

Nel suo punto P di coordinate (1, 0, 2).

Svolgimento

La retta sostegno dei raggi delle sfere passanti per il punto P deve essere ortogonale al piano π per la condizione di tangenza. Sia:

$$P_0 \equiv (x_0, y_{0,} z_0)$$

Un punto generico della retta in questione. Scriviamo l'equazione di una retta passante per i punti P_0 e P:

$$\frac{x - x_0}{x_P - x_0} = \frac{y - y_0}{y_P - y_0} = \frac{z - z_0}{z_P - z_0} \quad (1)$$

Affinché la retta sia perpendicolare a π deve essere (la retta deve avere la direzione del vettore $(1,2,-1)$):

$$\begin{cases} x_P - x_0 = 1 \\ y_P - y_0 = 2 \\ z_P - z_0 = -1 \end{cases}$$

Sostituiamo le coordinate del punto P (passaggio per P):

$$\begin{cases} 1 - x_0 = 1 \\ 0 - y_0 = 2 \\ 2 - z_0 = -1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -2 \\ z_0 = 3 \end{cases}$$

Sostituendo nella (1):

$$\frac{x}{1} = \frac{y + 2}{0 + 2} = \frac{z - 3}{2 - 3} \quad \rightarrow \quad x = \frac{y + 2}{2} = \frac{z - 3}{-1}$$

Scriviamo l'equazione cartesiana della retta:

$$\begin{cases} x = \dfrac{y + 2}{2} \\ x = \dfrac{z - 3}{-1} \end{cases}$$

Per risolvere questo esercizio è meglio considerare l'equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = t \\ t = \dfrac{y + 2}{2} \\ t = \dfrac{z - 3}{-1} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ 2t = y + 2 \\ -t = z - 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 2 \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Per trovare le coordinate dei centri delle due sfere dobbiamo imporre che la distanza dal punto P sia $\sqrt{6}$:

$$\sqrt{(x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2 + (z_C - z_P)^2} = \sqrt{6} \quad (2)$$

Dove:

$$(x_P, y_P, z_P) = (1,0,2)$$

E, dato che i centri delle sfere devono appartenere alla retta perpendicolare al piano:

$$(x_C, y_C, z_C) = (t, 2t - 2, 3 - t) \quad (3)$$

Sostituendo nella (2) ed elevando al quadrato:

$$(t-1)^2 + (2t-2)^2 + (3-t-2)^2 = 6$$

$$(t-1)^2 + (2t-2)^2 + (-t+1)^2 = 6$$

$$t^2 - 2t + 1 + 4t^2 - 8t + 4 + t^2 - 2t + 1 = 6$$

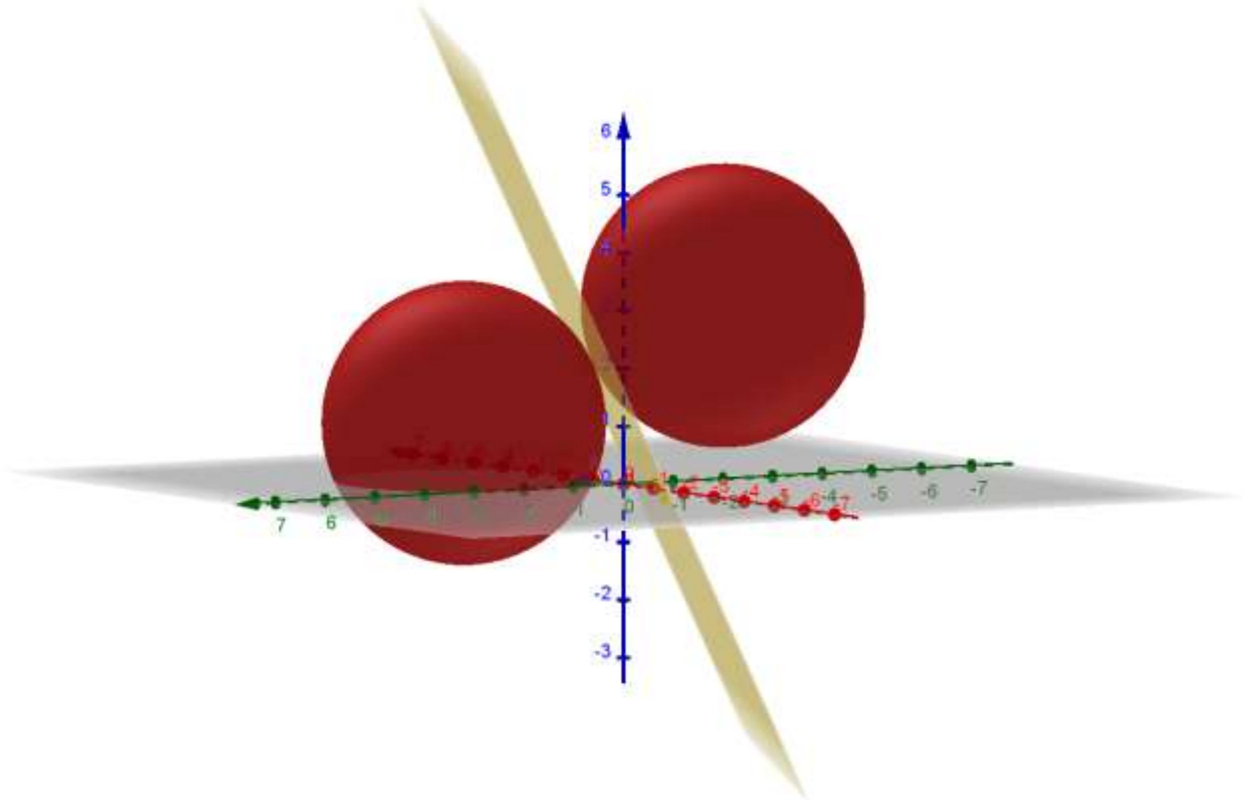
$$6t^2 - 12t + 6 = 6 \quad \rightarrow \quad 6t^2 - 12t = 0 \quad \rightarrow \quad t^2 - 2t = 0$$

$$t_1 = 2 \qquad t_2 = 0$$

Sostituendo nella (3) troviamo i centri delle due sfere:

$$C_1 = (2, 2, 1) \quad e \quad C_2 = (0, -2, 3)$$

Grafico con Geogebra:



Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales