Quesito 8

Un dado ha la forma di dodecaedro regolare con le facce numerate da 1 a 12. Il dado è truccato in modo che la faccia contrassegnata dal numero 3 si presenti con una probabilità p doppia rispetto a ciascun'altra faccia. Determinare il valore di p in percentuale e calcolare la probabilità che in 5 lanci del dado la faccia numero 3 esca almeno 2 volte.

Svolgimento

Indichiamo con p la probabilità dell'evento "È uscita la faccia numero 3". Dal testo del problema deduciamo che la probabilità dell'evento "È uscita la faccia numero *i*" con $i \in \{1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ vale $\frac{p}{2}$.
Ora, dato che questi eventi sono incompatibili (non possono uscire due facce contemporaneamente) e che il dado ha 12 facce, possiamo scrivere:

$$\sum_{\substack{i=0,\\ i\neq 3}}^{12} p(i) + p(3) = 1$$

$$11\frac{p}{2} + p = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{13}{2}p = 1 \quad \rightarrow \quad p = \frac{2}{13}$$

Probabilità che esca la faccia numero 3:

$$p = \frac{2}{13} = 0.15 = 15\%$$

Per determinare la probabilità che esca la faccia numero 3 almeno due volte in 5 lanci del dado consideriamo i due eventi:

- È uscita la faccia numero 3 (successo)
- Non è uscita la faccia numero 3

Per capire come procedere osserviamo che:

1. In questo caso ogni lancio del dado può avere solo i due esiti elencati sopra;
2. La probabilità che si verifichi ognuno di questi due eventi è costante;
3. Il valore del numero uscito in un lancio non influenza il numero che uscirà nei lanci successivi.

La variabile aleatoria che descrive ogni lancio è binomiale.
Indichiamo con E l'evento "È uscita la faccia numero 3". Possiamo scrivere:

$$\begin{cases} p(E) = p = \frac{2}{13} \quad (successo) \\ \\ p(\bar{E}) = 1 - p = \frac{11}{13} \end{cases}$$

La probabilità di ottenere *k* successi in *n* prove è data da:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

La probabilità che esca la faccia numero 3 almeno due volte in 5 lanci è data da:

$$p(X \geq 2) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1)] =$$

$$= 1 - \left[\binom{5}{0}\left(\frac{2}{13}\right)^0\left(\frac{11}{13}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{2}{13}\right)^1\left(\frac{11}{13}\right)^4\right] =$$

$$= 1 - \left[\frac{5!}{0!\,5!}\left(\frac{11}{13}\right)^5 + \frac{5!}{1!\,4!}\frac{2}{13}\left(\frac{11}{13}\right)^4\right] =$$

$$\cong 1 - [0{,}43 + 5 \cdot 0.15 \cdot 0{,}51] \cong 1 - 0.83 \cong 0.17 = 17\%$$

Matilde Consales