Quesito 9

Dimostrare che l'equazione:

$$arctgx + x^3 + e^x = 0$$

Ha una ed una sola soluzione reale.

Svolgimento

Posto:

$$f(x) = arctgx + x^3 + e^x$$

Innanzi tutto dobbiamo far vedere che la funzione interseca l'asse delle ascisse. Questo equivale a trovare due valori X_1 e X_2 tali che $f(x_1) > 0 \;\; e \;\; f(x_2) < 0$.

Per $x = 0$ si trova:

$$f(0) = arctg0 + 0^3 + e^0 = e > 0$$

Per $x = -1$ si ha:

$$f(-1) = arctg(-1) + (-1)^3 + e^{-1} = -\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{e} \cong -1.41 < 0$$

Deduciamo che la funzione ha uno zero per il teorema degli zeri.

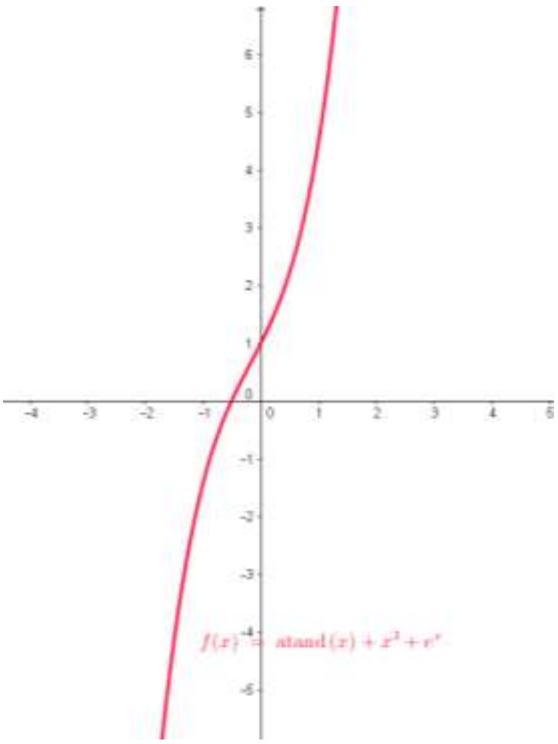
Questo zero è unico se la funzione è monotona. Troviamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} + 3x^2 + e^x$$

La derivata prima è sempre positiva e non si annulla mai quindi la funzione è monotona crescente.

Si deduce che lo zero è unico.

Facciamo il grafico:



Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales