Problema 1

Devi programmare il funzionamento di una macchina che viene adoperata nella produzione industriale di mattonelle per pavimenti. Le mattonelle sono di forma quadrata di lato 1 (in un'opportuna unità di misura) e le fasi di lavoro sono le seguenti:

- si sceglie una funzione $y = f(x)$ definita e continua nell'intervallo [0,1], che soddisfi le condizioni:

  a) $f(0) = 1$;
  b) $f(1) = 0$;
  c) $0 < f(x) < 1 \ per \ 0 < x < 1$.

- La macchina traccia il grafico Γ della funzione $f(x)$ e i grafici simmetrici di Γ rispetto all'asse *x*, all'asse *y*, e all'origine *O* ottenendo in questo modo una curva chiusa Λ, passante per i punti (1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1), simmetrica rispetto agli assi cartesiani ed all'origine, contenuta nel quadrato *Q* di vertici (1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (-1, 1).
- La macchina costruisce la mattonella colorando di grigio l'interno della curva chiusa Λ e lasciando bianca la parte restante del quadrato Q. Vengono mostrate sul display alcune mattonelle affiancate per dare un'idea dell'aspetto del pavimento.

Il manuale d'uso riporta un esempio del processo realizzativo di una mattonella semplice:

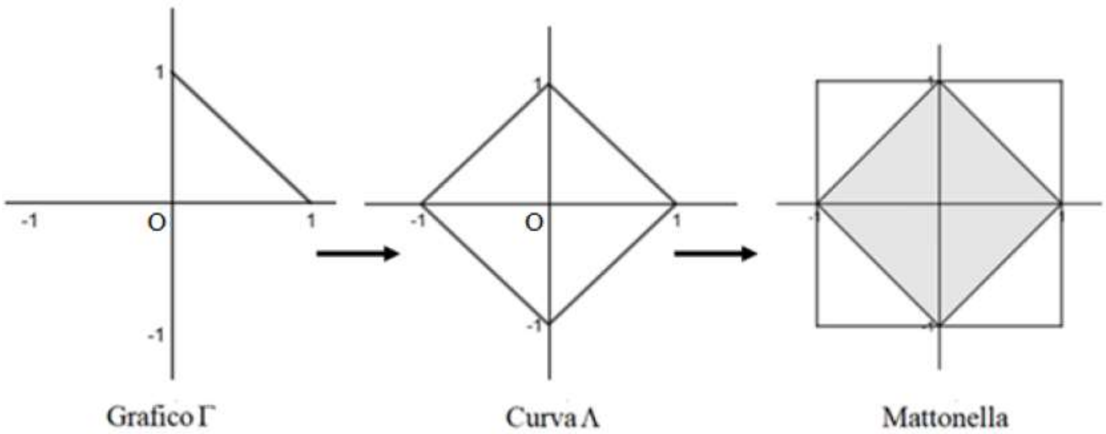


Figura 1

La pavimentazione è riportata di seguito:

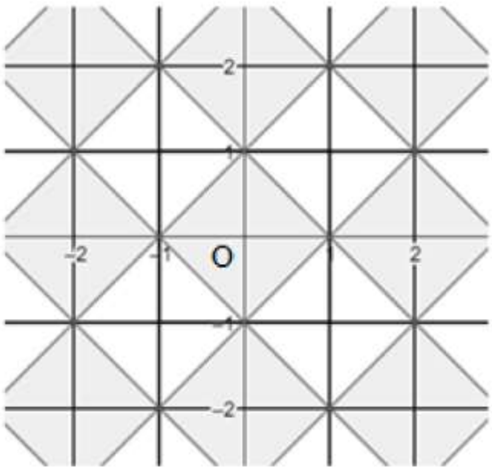


Figura 2

1. Con riferimento all'esempio, determina l'espressione della funzione $f(x)$ e l'equazione della curva Λ, così da poter effettuare una prova e verificare il funzionamento della macchina.
Ti viene richiesto di costruire una mattonella con un disegno più elaborato che, oltre a rispettare le condizioni a), b) e c) descritte in precedenza, abbia $f'(0) = 0$ e l'area della parte colorata pari al 55% dell'area dell'intera mattonella. A tale scopo, prendi in considerazione funzioni polinomiali di secondo grado e di terzo grado.

2. Dopo aver verificato che non è possibile realizzare quanto richiesto adoperando una funzione polinomiale di secondo grado, determina i coefficienti $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ della funzione $f(x)$ polinomiale di terzo grado che soddisfa le condizioni poste. Rappresenta infine in un piano cartesiano la mattonella risultante.
Vengono proposti a un cliente due tipi diversi di disegno, derivanti rispettivamente dalle funzioni $a_n(x) = 1 - x^n$ e $b_n(x) = (1-x)^n$, considerate per $x \in [0,1], con\ n\ intero\ positivo.$

3. Verifica che al variare di n tutte queste funzioni rispettano le condizioni a), b) e c). Dette $A(n) e\ B(n)$ le aree delle parti colorate delle mattonelle ottenute a partire da tali funzioni $a_n\ e\ \ b_n$ calcola

$$\lim_{n\to+\infty} A(n) \quad e \qquad \lim_{n\to+\infty} B(n)$$

ed interpreta i risultati in termini geometrici.
Il cliente decide di ordinare 5.000 mattonelle con il disegno derivato da $a_2(x)$ e 5.000 con quello derivato da $b_2(x)$. La verniciatura viene effettuata da un braccio meccanico che, dopo aver depositato il colore, torna alla posizione iniziale sorvolando la mattonella lungo la diagonale. A causa di un malfunzionamento, durante la produzione delle 10.000 mattonelle si verifica con una probabilità del 20% che il braccio meccanico lasci cadere una goccia di colore in un punto a caso lungo la diagonale, macchiando così la mattonella appena prodotta.

4. Fornisci una stima motivata del numero di mattonelle che, avendo una macchia nella parte non colorata, risulteranno danneggiate al termine del ciclo di produzione.

Svolgimento

Punto 1

Determiniamo l'espressione della funzione $f(x)$. Dalla figura 1 vediamo che è un tratto di retta. Scriviamo l'equazione di una generica retta.

$$y = mx + q$$

Ed imponiamo il passaggio per i punti (0, 1) e (1, 0)

$$\begin{cases} 1 = q\ \ passaggio\ per\ (0,1) \\ 0 = m + q\ \ passaggio\ per\ (1,0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = -q = -1 \\ q = 1 \end{cases}$$

Quindi:

$$f(x) = -x + 1\ \ per\ \ x \in [0,1]$$

Verifichiamo che soddisfi le richieste:

a) $f(0) = -0 + 1 = 1$
b) $f(1) = -1 + 1 = 0$
c) $0 < f(x) < 1 \ \ \rightarrow \ \ 0 < -x + 1 < 1$

consideriamo la prima disequazione:

$$-x + 1 > 0 \ \rightarrow\ -x > -1 \ \rightarrow\ x < 1$$

Dalla seconda disequazione otteniamo:

$$-x+1<1 \quad \rightarrow \quad -x<0 \quad \rightarrow \quad x>0$$

Quindi:

$$0<x<1$$

Anche il punto c) è verificato.
Scriviamo adesso l'equazione della curva Λ. Dalla figura 1 vediamo che si compone di quattro tratti di rette.
Consideriamo l'intervallo $-1<x<0$.
Troviamo due tratti di rette. La prima passa per i punti (-1, 0) e (0, 1):

$$\begin{cases} 0=-m+q \ \ passaggio\ per\ (-1,0) \\ \\ 1=q \ \ passaggio\ per\ (0,1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=q=1 \\ \\ q=1 \end{cases}$$

$$y=x+1$$

La seconda passa per i punti (-1, 0) e (0, -1):

$$\begin{cases} 0=-m+q \ \ passaggio\ per\ (-1,0) \\ \\ -1=q \ \ passaggio\ per\ (0,-1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=q=-1 \\ \\ q=-1 \end{cases}$$

$$y=-x-1$$

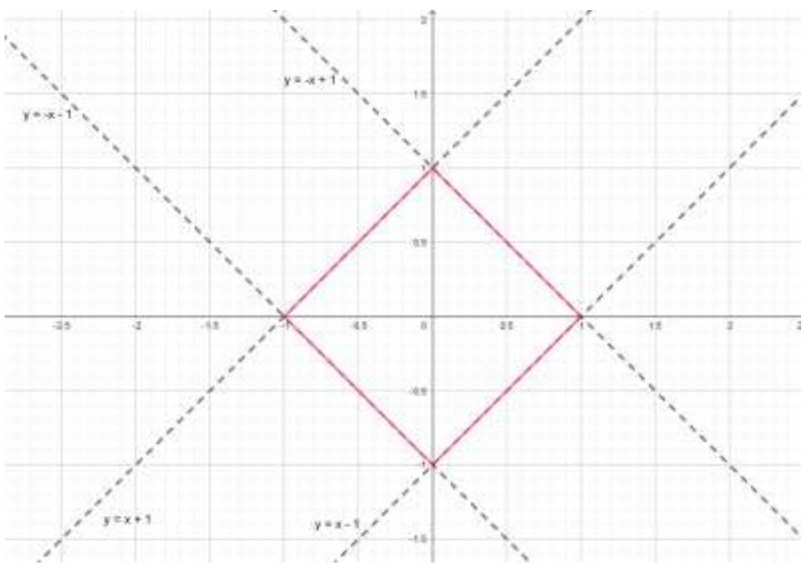
Consideriamo l'intervallo $0<x<1$.
Troviamo due tratti di rette. La prima passa per i punti (1, 0) e (0, 1). Abbiamo già trovato la sua equazione:

$$y=-x+1$$

La seconda passa per i punti (1, 0) e (0, -1).

$$\begin{cases} 0=m+q \ \ passaggio\ per\ (1,0) \\ \\ -1=q \ \ passaggio\ per\ (0,-1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m=-q=1 \\ \\ q=-1 \end{cases}$$

$$y=x-1$$



Cerchiamo di scrivere l'espressione di Λ in un modo più sintetico.

$$\Lambda: \begin{cases} y = -|x| + 1 \;\; per -1 \leq x \leq 1 \;\; e \; y \geq 0 \\ \\ y = |x| - 1 \;\; per -1 \leq x \leq 1 \;\; e \; y < 0 \end{cases}$$

Possiamo anche scrivere:

$$\Lambda: \; |y| = -|x| + 1$$

Punto 2

Consideriamo una generica funzione polinomiale di secondo grado:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

E imponiamo che soddisfi le condizioni:

$$f(0) = 1 \quad \rightarrow \quad c = 1 \quad condizione \; a)$$

$$f(1) = 0 \quad \rightarrow \quad a + b + c = 0 \quad condizione \; b)$$

$$f'(x) = 2ax + b \;\; f'(0) = b = 0$$

Per trovare i coefficienti a, b, e c risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} c = 1 \\ \\ b = 0 \\ \\ a + b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ \\ b = 0 \\ \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ \\ b = 0 \\ \\ c = 1 \end{cases}$$

Quindi:

$$f(x) = -x^2 + 1$$

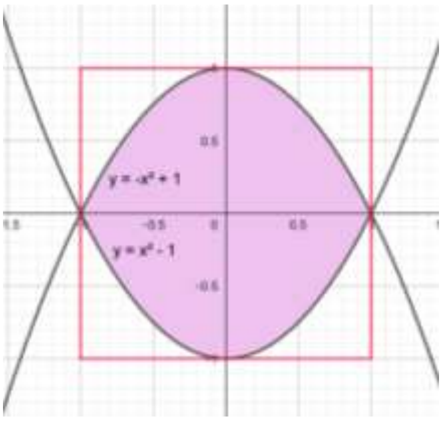
La funzione ricavata è una parabola con concavità verso il basso ed ha il vertice (massimo) nel punto (0, 1). È verificata anche la condizione c). Infatti:

$$0 < f(x) < 1 \;\; per \; 0 < x < 1$$

In questo caso la curva Λ è data da:

$$\Lambda: \begin{cases} y = -x^2 + 1 \;\; per -1 \leq x \leq 1 \;\; e \; y \geq 0 \\ \\ y = x^2 - 1 \;\; per -1 \leq x \leq 1 \;\; e \; y < 0 \end{cases}$$

Disegniamo la mattonella con questa funzione:



Dobbiamo vedere se l'area della parte colorata è pari al 55% dell'area della mattonella. La mattonella è un quadrato di lato 2 quindi:

$$A_{mattonella} = 4$$

Troviamo l'area della parte colorata. Data la simmetria della curva possiamo scrivere:

$$A_{Parte\ colorata} = 4\int_0^1 (-x^2+1)dx = 4\left(-\frac{x^3}{3}+x\,\Bigg|_0^1\right) = 4\left(-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{8}{3}$$

Ma il 55% di 4 vale:

$$4\,\frac{55}{100} = \frac{55}{25} = \frac{11}{5}$$

La funzione polinomiale di secondo grado non soddisfa la richiesta. Proviamo con un polinomio di terzo grado:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Imponiamo che soddisfi le condizioni:

$$f(0) = 1 \quad \rightarrow \quad d = 1 \quad condizione\ a)$$

$$f(1) = 0 \quad \rightarrow \quad a+b+c+d = 0 \quad condizione\ b)$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \;\; f'(0) = c = 0$$

Troviamo i coefficienti risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} d = 1 \\ a+b+c+d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b+1 = 0 \\ d = 1 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -b-1 \\ d = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

Possiamo scrivere:

$$f(x) = -(1+b)x^3 + bx^2 + 1$$

Per calcolare b dobbiamo imporre che la parte colorata della piastrella abbia area pari al 55% dell'area del quadrato. Quindi deve essere:

$$4\int_0^1 [-(1+b)x^3 + bx^2 + 1]dx = \frac{11}{5}$$

$$4\left[-(1+b)\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} + x\right]\Bigg|_0^1 = \frac{11}{5}$$

$$4\left[\frac{-(1+b)}{4} + \frac{b}{3} + 1\right] = \frac{11}{5}$$

$$4\,\frac{-3-3b+4b+12}{12} = \frac{11}{5}$$

$$\frac{b+9}{3} = \frac{11}{5}$$

$$\frac{b}{3} = \frac{11}{5} - 3$$

$$b = 3\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{12}{5}$$

Scriviamo la funzione:

$$f(x) = -\left(1 - \frac{12}{5}\right)x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 1$$

$$f(x) = \frac{7}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 + 1$$

Adesso dobbiamo verificare l'ultima condizione: cioè che sia:

$$0 < f(x) < 1 \;\; per\; 0 < x < 1$$

Calcoliamo la derivata prima:

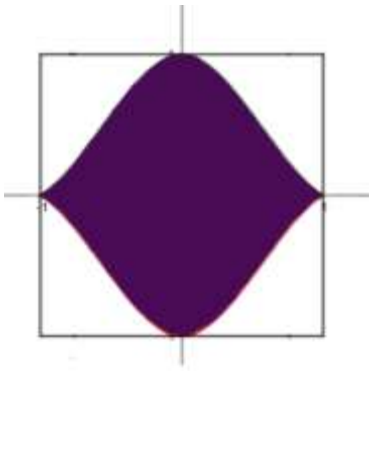
$$f'(x) = \frac{21}{5}x^2 - \frac{24}{5}x$$

$$f'(x) = 0 \quad se \;\; x_1 = 0 \;\; e \;\; x_2 = \frac{24}{5}\frac{5}{21} = \frac{8}{7}$$

$$f'(x) > 0 \quad se \quad x < 0 \;\; e \;\; x > \frac{8}{7} \quad f(x) \quad crescente$$

$$f'(x) < 0 \quad se \quad 0 < x < \frac{8}{7} \;\; f(x) \quad decrescente$$

Ma allora per *0<x<1* la funzione trovata è decrescente e, poiché $f(0) = 1 \quad e \quad f(1) = 0$ la condizione $0 < f(x) < 1 \;\; per\; 0 < x < 1$ è verificata.
La funzione di terzo grado trovata soddisfa tutte le condizioni richieste. Disegniamo la mattonella che si ottiene.



Punto 3

Consideriamo la funzione:

$$a_n(x) = 1 - x^n \;\; per\; x \in [0,1]\; con\; n\; intero\; positivo$$

E verifichiamo che soddisfa le condizioni a), b) e c):

$$a_n(0) = 1 - 0^n = 1 \quad condizione\; a)\; verificata$$

$$a_n(1) = 1 - 1^n = 0 \;\; condizione\; b)\; verificata$$

Per verificare la condizione c) consideriamo che:

$$0 < x < 1 \quad \rightarrow \quad 0 < x^n < 1$$

Cambiamo segno (e, ovviamente, verso della disequazione):

$$-1 < -x^n < 0$$

Aggiungiamo 1:

$$-1 + 1 < -x^n + 1 < 0 + 1$$

$$0 < 1 - x^n < 1 \quad \rightarrow \quad 0 < f(x) < 1 \ \ condizione\ c)\ verificata$$

Facciamo la stessa cosa per la funzione:

$$b_n(x) = (1 - x)^n \ \ per\ x \in [0, 1]\ con\ n\ intero\ positivo$$

$$b_n(0) = (1 - 0)^n = 1 \ \ condizione\ a)\ verificata$$

$$b_n(1) = (1 - 1)^n = 0 \ \ condizione\ b)\ verificata$$

Se

$$0 < x < 1$$

Cambiando segno si ottiene:

$$-1 < -x < 0$$

Aggiungiamo 1:

$$-1 + 1 < -x + 1 < 0 + 1 \quad 0 < 1 - x < 1$$

Eleviamo alla *n*:

$$0 < (1 - x)^n < 1 \quad condizione\ c)\ verificata$$

L'area della parte colorata della piastrella che si ottiene con $a_n(x)$ è data da:

$$A_n(x) = 4 \int_0^1 a_n(x)dx = 4 \int_0^1 (1 - x^n)dx = 4 \left[\left(x - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \Bigg|_0^1 \right] =$$

$$= 4 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 4 \frac{n + 1 - 1}{n + 1} = \frac{4n}{n + 1}$$

Calcoliamo il limite richiesto:

$$\lim_{n\to+\infty} A_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{n + 1} = 4$$

Se si usa questa funzione al crescere di *n* l'area colorata aumenta fino ad occupare l'area di tutta la piastrella.

Procediamo allo stesso modo per l'altra funzione:

$$B_n(x) = 4 \int_0^1 b_n(x)dx = 4 \int_0^1 (1 - x)^n dx = 4 \left[\left(-\frac{(1 - x)^{n+1}}{n + 1} \right) \Bigg|_0^1 \right] =$$

$$= 4 \left[-\frac{0}{n + 1} - \left(-\frac{1}{n + 1} \right) \right] = \frac{4}{n + 1}$$

Calcoliamo il limite richiesto:

$$\lim_{n\to+\infty} B_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n+1} = 0$$

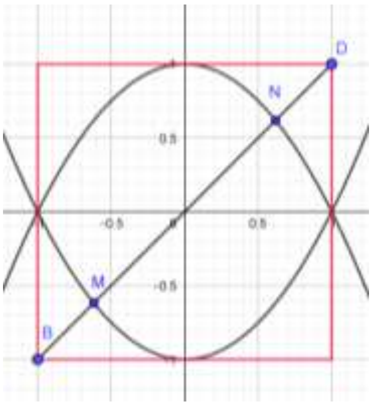
Se si usa questa funzione al crescere di n l'area colorata diminuisce. Al limite la piastrella risulterà bianca.

Punto 4

Consideriamo la funzione:

$$a_2(x) = 1 - x^2$$

Abbiamo già disegnato la mattonella che si ottiene. Riprendiamo il disegno e tracciamo anche la diagonale percorsa dal braccio meccanico durante la verniciatura.



La mattonella risulterà macchiata se la goccia di vernice cadrà al di fuori della parte colorata e quindi sui segmenti *BM* o *ND*. La probabilità che questo accada vale:

$$p_a = \frac{\overline{BM} + \overline{ND}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD} - \overline{MN}}{\overline{BD}}$$

Poiché la mattonella è un quadrato di lato 2:

$$\overline{BD} = 2\sqrt{2}$$

Ricordiamo che:

$$\Lambda: \begin{cases} y = -x^2 + 1 \;\; per -1 \leq x \leq 1 \;\; e \; y \geq 0 \\ \\ y = x^2 - 1 \;\; per -1 \leq x \leq 1 \;\; e \; y < 0 \end{cases}$$

Dobbiamo calcolare la lunghezza del segmento $\overline{MN}$. I punti M e N sono i punti di intersezione della curva e della diagonale del quadrato. La retta sostegno di questa diagonale è $y = x$ (infatti è la retta passante per i punti (-1, -1) e (1, 1)). Troviamo M risolvendo il sistema tenendo presente che $-1 \leq x \leq 0$ e :

$$\begin{cases} y = x \\ \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x^2 - 1 \\ \\ y = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ \\ y = x \end{cases}$$

$$x_{1-2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

L'unica soluzione valida è:

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

L'altra soluzione non è accettabile infatti:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$$

Quindi il punto M ha coordinate:

$$M = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Con lo stesso procedimento troviamo le coordinate del punto N.
Questa volta deve essere $0 < x < 1$

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x^2 + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -x^2 + 1 \\ y = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 = 0 \\ y = x \end{cases}$$

$$x_{1-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

L'unica soluzione valida è:

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

L'altra soluzione non è accettabile infatti:

$$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$$

Quindi il punto M ha coordinate:

$$N = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Calcoliamo la lunghezza del segmento:

$$\overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2\left(\frac{1-\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{2(1-\sqrt{5})}{2}\right)^2} = \sqrt{2}\left|1-\sqrt{5}\right|$$

Ma la lunghezza di un segmento non può essere negativa quindi:

$$\overline{MN} = \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)$$

La probabilità che la piastrella sia macchiata vale:

$$p_a = \frac{\overline{BD} - \overline{MN}}{\overline{BD}} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{2}} = \frac{2 - (\sqrt{5}-1)}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

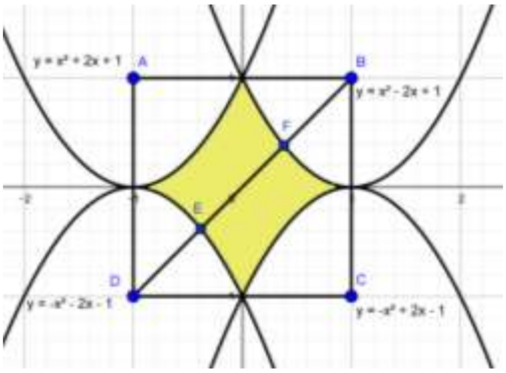
Seguiamo lo stesso procedimento per la funzione:

$$b_2(x) = (1-x)^2$$

Che rappresenta una parabola con concavità rivolta verso l'alto e vertice di coordinate (1, 0). In questo caso la curva Λ è data da:

$$\Lambda = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 \quad per \ \ 0 \le x \le 1 \ \ e \quad 0 \le y \le 1 \\ x^2 + 2x + 1 \quad per \ -1 \le x \le 0 \ \ e \quad 0 \le y \le 1 \\ -x^2 - 2x - 1 \quad per \ -1 \le x \le 0 \ \ e \quad -1 \le y \le 0 \\ -x^2 + 2x - 1 \quad per \ \ 0 \le x \le 1 \ \ e \quad -1 \le y \le 0 \end{cases}$$

Disegno della piastrella:



La mattonella risulterà macchiata se la goccia di vernice cadrà al di fuori della parte colorata e quindi sui segmenti *BM* o *ND*. La probabilità che questo accada vale:

$$p_b = \frac{\overline{BM} + \overline{EF}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD} - \overline{EF}}{\overline{BD}}$$

Data la simmetria della curva Λ si ha:

$$\overline{EF} = 2\overline{OF}$$

Troviamo le coordinate del punto *F*:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = x^2 - 2x + 1 \\ y = x \end{cases}$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x_{1-2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La soluzione:

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Non è accettabile perché deve essere $0 \le x \le 1$. Quindi:

$$F = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Calcoliamo la lunghezza del segmento $\overline{OF}$:

$$\overline{OF} = \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}-0\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}\left|3-\sqrt{5}\right|}{2}$$

$$\overline{OF} = \frac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{2} \quad \rightarrow \quad \overline{EF} = 2\,\frac{\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{2} = \sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$$

$$p_b = \frac{\overline{BD}-\overline{EF}}{\overline{BD}} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{2}} = \frac{2-3+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Troviamo adesso la percentuale di mattonelle macchiate per ogni tipo. Consideriamo i due eventi:

$$E_a = mattonella\ di\ tipo\ A\ macchiata$$

$$E_b = mattonella\ di\ tipo\ B\ macchiata$$

Calcoliamo le probabilità sapendo che:

$$p(E_a) = p(E_b) = 20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

La probabilità che risulti danneggiata una mattonella di tipo *A* vale:

$$p_a \cdot p(E_a) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3-\sqrt{5}}{10} = 0.0764 = 7.64\%$$

La probabilità che risulti danneggiata una mattonella di tipo *B* vale:

$$p_b \cdot p(E_b) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{10} = 0.1236 = 12.36\%$$

Il numero complessivo di mattonelle danneggiate dell'ordine del cliente è dato da:

$$5000 \cdot p_a \cdot p(E_a) + 5000 \cdot p_b \cdot p(E_b) = 5000 \cdot 0.0764 + 5000 \cdot 0.1236 = 1000$$

Matilde Consales