Problema 2
Consideriamo la funzione $f_k: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, così definita:

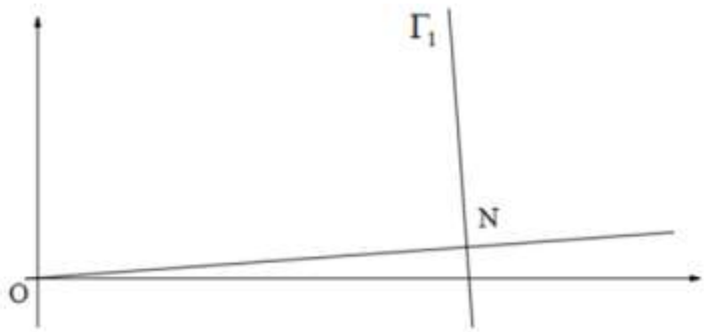
$$f_k(x) = -x^3 + kx + 9 \quad con\ k \in Z$$

1. Detto Γ_k il grafico della funzione, verifica che per qualsiasi valore del parametro k la retta r_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 0 e la retta s_k, tangente a Γ_k nel punto di ascissa 1 si incontrano in un punto M di ascissa $\frac{2}{3}$.

2. Dopo aver verificato che $k=1$ è il massimo intero positivo per cui l'ordinata del punto M è minore di 10, studia l'andamento della funzione $f_1(x)$, determinandone i punti stazionari e di flesso e tracciandone il grafico.

3. Detto T il triangolo delimitato dalle rette r_1, s_1 e dall'asse delle ascisse, determina la probabilità che, preso a caso un punto $P = (x_P, y_P)$ all'interno di T, questo si trovi al di sopra di Γ_1 (cioè che si abbia $y_P > f_1(x)$ per tale punto.

4. Nella figura è evidenziato un punto $N \in \Gamma_1$ e un tratto del grafico Γ_1. La retta normale a Γ_1 in N (vale a dire la perpendicolare alla retta tangente a Γ_1 in quel punto) passa per l'origine degli assi O. Il grafico possiede tre punti con questa proprietà. Dimostra, più in generale, che il grafico di un qualsiasi polinomio di grado $n>0$ non può possedere più di $2n-1$ punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.



Svolgimento

Punto 1

Troviamo la retta r_k. Scriviamo l'equazione di una retta generica nel piano:

$$r_k:\ y = mx + q$$

La retta deve essere tangente a Γ_k data nel punto di ascissa 0 quindi il coefficiente angolare deve essere uguale alla derivata prima della curva in quel punto:

$$m = f_k'(0)$$

$$f_k'(x) = -3x^2 + k$$

$$m = f_k'(0) = k$$

Imponiamo adesso il passaggio per il punto di tangenza della curva:

$$f_k(0) = 9$$

E della retta:

$$9 = kx + q \quad \rightarrow \quad q = 9$$

Si trova un fascio proprio di rette con centro di coordinate (0, 9)

$$r_k: y = kx + 9$$

Analogamente troviamo la retta s_k

$$s_k:\ y = mx + q$$

La retta deve essere tangente alla famiglia di curve data nel punto di ascissa 1 quindi deve essere:

$$m = f_k'(1)$$

$$f_k'(x) = -3x^2 + k$$

$$m = f_k'(1) = -3 + k$$

Imponiamo adesso il passaggio per il punto di tangenza:

$$f_k(1) = -1 + k + 9 = k + 8$$

$$k + 8 = k - 3 + q \quad \rightarrow \quad q = 11$$

Scriviamo la famiglia di rette s_k:

$$s_k: y = (k-3)x + 11$$

Troviamo il punto in cui si incrociano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = kx + 9 \\ y = (k-3)x + 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = kx + 9 \\ kx + 9 = kx - 3x + 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = kx + 9 \\ 3x = 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{2}{3}k + 9 \end{cases}$$

Le rette si incontrano nel punto di ascissa $\frac{2}{3}$.

Punto 2

L'ordinata del punto M vale:

$$y_M = \frac{2}{3}k + 9$$

Si ha:

$$y_M < 10 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3}k + 9 < 10 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3}k < 1$$

$$k < \frac{3}{2}$$

il più grande k intero positivo che soddisfa la disequazione è $k=1$.

Consideriamo la funzione:

$$f_1(x) = -x^3 + x + 9$$

La funzione è definita, continua e derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$. Non presenta asintoti.

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + x + 9) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + x + 9) = -\infty$$

Intersezione con gli assi. Intersezione con asse delle ordinate:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -x^3 + x + 9 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 9 \end{cases}$$

Intersezione con l'asse delle ascisse:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -x^3 + x + 9 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ -x^3 + x + 9 = 0 \end{cases}$$

Non ci sono formule risolutive per l'equazione data quindi dobbiamo trovare una soluzione approssimata usando il teorema degli zeri. La funzione assume valori sia positivi che negativi quindi interseca l'asse delle ascisse. Osserviamo che:

$$f_1(2) = -8 + 2 + 9 = 3 > 0$$

$$f_1(3) = -27 + 3 + 9 = -17 < 0$$

Quindi il punto di intersezione con l'asse delle ascisse è compreso tra 2 e 3. Proviamo a vedere quanto vale nel punto di ascissa 2.5:

$$f_1\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{125}{8} + \frac{5}{2} + 9 = \frac{-125 + 20 + 72}{8} = -\frac{133}{8} < 0$$

Il punto di intersezione è compreso tra 2 e 2.5.

Non ci sono massimi e minimi assoluti. Troviamo i massimi e minimi relativi studiando la derivata prima:

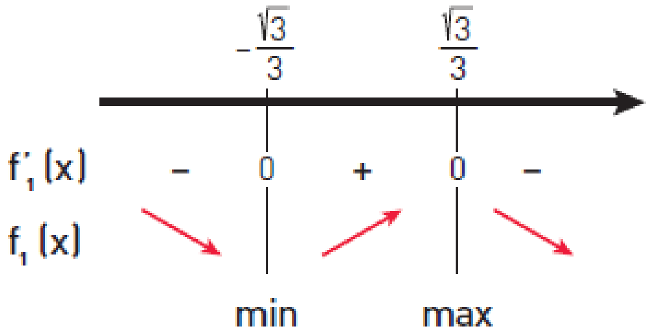
$$f_1'(x) = -3x^2 + 1$$

$$f_1'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -3x^2 + 1 = 0$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f_1'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \mathit{crescente}$$

$$f_1'(x) < 0 \quad \rightarrow \quad x < -\frac{\sqrt{3}}{3};\ x > \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \mathit{decrescente}$$



La funzione presenta un minimo per:

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad y = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 9 = -\frac{-3\sqrt{3}}{27} - \frac{\sqrt{3}}{3} + 9 = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 81}{9} = \frac{-2\sqrt{3} + 81}{9}$$

E un massimo per:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad y = -\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \frac{\sqrt{3}}{3} + 9 = -\frac{3\sqrt{3}}{27} + \frac{\sqrt{3}}{3} + 9 = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 81}{9} = \frac{2\sqrt{3} + 81}{9}$$

Punti stazionari:

$$minimo\ relativo: \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{-2\sqrt{3} + 81}{9}\right)$$

$$massimo\ relativo: \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3} + 81}{9}\right)$$

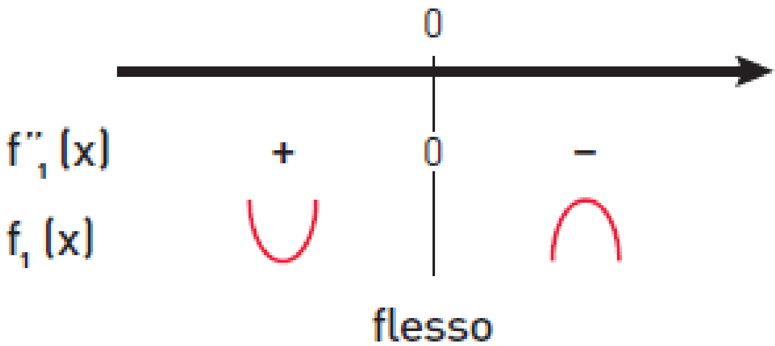
Studiamo adesso la derivata seconda:

$$f_1''(x) = -6x$$

$$f_1''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

$$f_1''(x) > 0 \quad \rightarrow \quad x < 0 \quad convessa$$

$$f_1''(x) < 0 \quad \rightarrow \quad x > 0 \quad concava$$



La funzione presenza un punto di flesso per $x=0$ e $y=f_1(0)=9$:

$$flesso: \ (0{,}9)$$

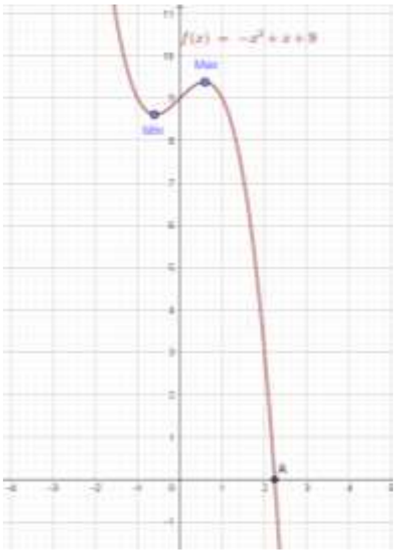


Figura 1 Grafico.

Punto 3

Scriviamo le equazioni delle due rette e disegniamo il grafico:

$$r_1 : y = x + 9$$

$$s_1 : y = -2x + 11$$

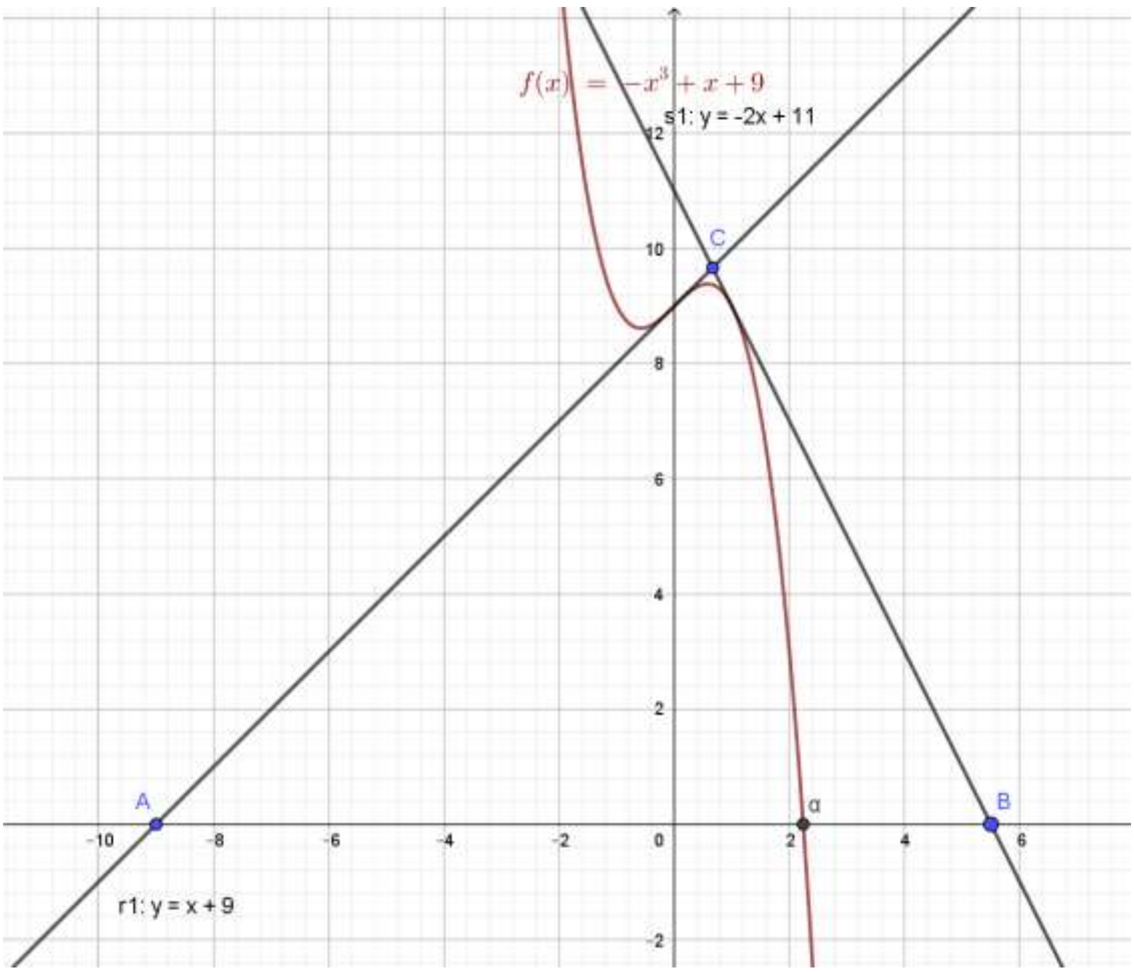


Figura 2 Il grafico completo.

Determiniamo i vertici del triangolo *ABC* di figura 2. Il vertice A è il punto di intersezione della retta r_1 e l'asse delle ascisse:

$$\begin{cases} y = x + 9 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 9 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A = (-9, 0)$$

Il vertice B è il punto di intersezione della retta s_1 e l'asse delle ascisse:

$$\begin{cases} y = -2x + 11 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x + 11 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow B = (\frac{11}{2}, 0)$$

Il vertice C è il punto di incrocio delle rette r_1 e s_1:

$$\begin{cases} y = x + 9 \\ y = -2x + 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x + 9 \\ x + 9 = -2x + 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x + 9 \\ 3x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} + 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{29}{3} \end{cases} \rightarrow C = (\frac{2}{3}, \frac{29}{3})$$

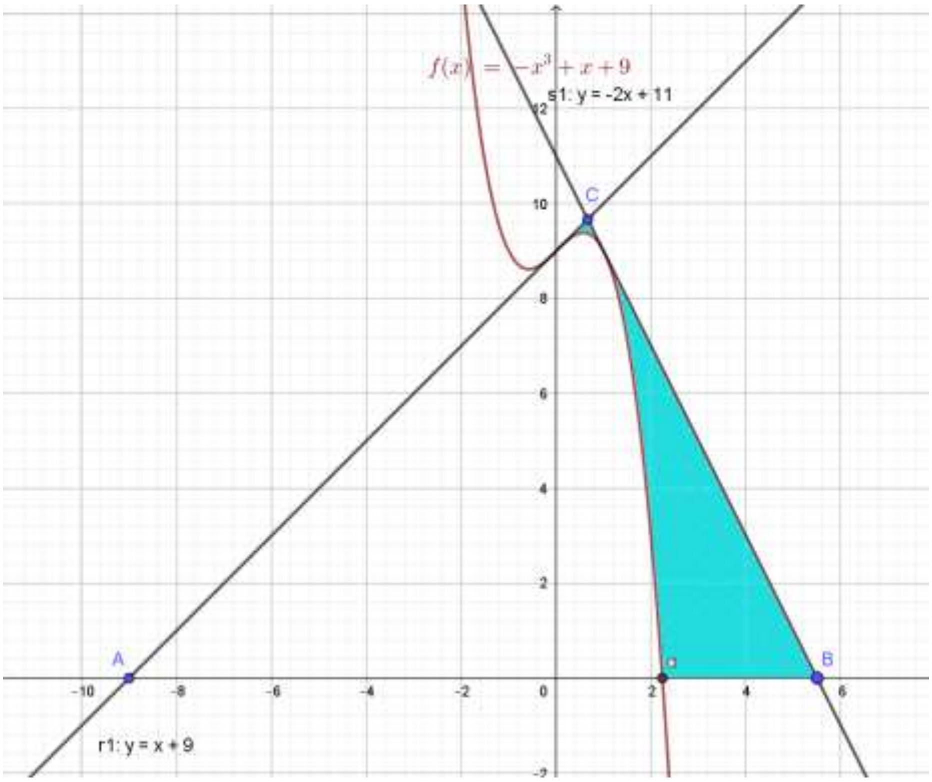


Figura 3 L'area con $y_P > f_1(x)$.

La probabilità richiesta è data dal rapporto dell'area colorata di azzurro in figura 3 e quella del triangolo *ABC*. Determiniamo l'area del triangolo:

$$A_{ABC} = \frac{(|x_A| + x_B)y_C}{2} = \frac{\left(9 + \frac{11}{2}\right) \cdot \frac{29}{3}}{2} = \frac{\frac{29}{2} \cdot \frac{29}{3}}{2} = \frac{\frac{841}{6}}{2} = \frac{841}{12} \cong 70.08$$

Per capire meglio com'è fatta l'area superiore di figura 3 consideriamo il seguente ingrandimento:

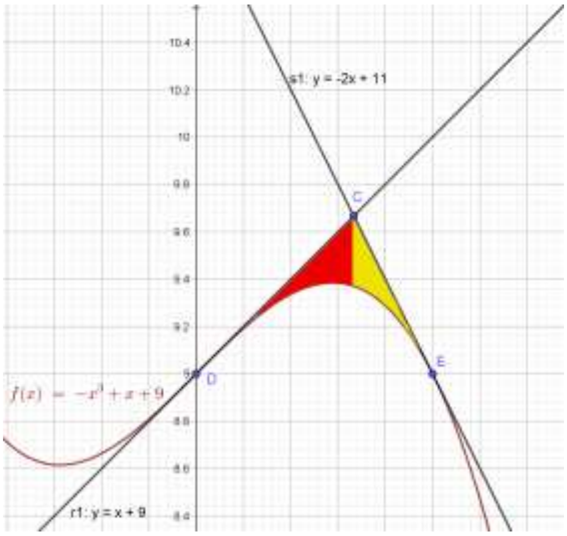


Figura 4 Particolare area superiore.

Dalla figura vediamo che l'area da calcolare è formata da due parti:

- la parte rossa che si estende dal punto D al punto C ed è delimitata dalla curva e dalla retta r_1;
- la parte gialla che si estende dal punto C al punto E ed è delimitata dalla curva e dalla retta s_1;

Dobbiamo determinare i punti D ed E. Il punto D è il punto di intersezione della retta r_1 e la curva:

$$\begin{cases} y = x + 9 \\ y = -x^3 + x + 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x + 9 \\ x + 9 = -x^3 + x + 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x + 9 \\ x^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 9 \end{cases} \rightarrow \quad D = (0, 9)$$

Il punto E è il punto di intersezione della retta s_1 e la curva:

$$\begin{cases} y = -2x + 11 \\ y = -x^3 + x + 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2x + 11 \\ -2x + 11 = -x^3 + x + 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2x + 11 \\ -x^3 + 3x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 9 \end{cases} \rightarrow \quad E = (1, 9)$$

Troviamo l'area:

$$A_{Superiore} = \int_0^{\frac{2}{3}} [x + 9 - (-x^3 + x + 9)]\, dx + \int_{\frac{2}{3}}^{1} [-2x + 11 - (-x^3 + x + 9)] dx =$$

$$= \int_0^{\frac{2}{3}} [x + 9 + x^3 - x - 9]\, dx + \int_{\frac{2}{3}}^{1} [-2x + 11 + x^3 - x - 9] dx =$$

$$\int_0^{\frac{2}{3}} x^3dx + \int_{\frac{2}{3}}^{1} [x^3-3x+2]dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x^4}{4}-3\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{\frac{2}{3}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{81} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{81} + \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{9} - \frac{4}{3} = \frac{9-54+72+24-48}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Vediamo meglio anche l'area inferiore di figura 3 con il seguente ingrandimento:

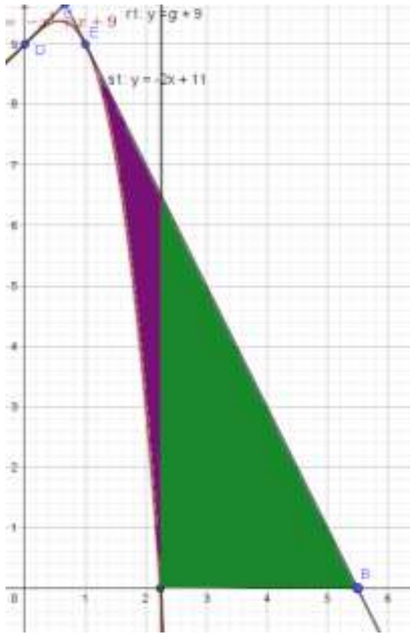


Figura 5 Particolare area inferiore.

Dalla figura vediamo che l'area da calcolare è formata da due parti:

- la parte viola che si estende dal punto E al punto α ed è delimitata dalla curva e dalla retta s_1;
- la parte verde che si estende dal punto α al punto B ed è delimitata dalla retta s_1;

Calcoliamo l'area:

$$A_{Inferiore} = \int_1^{\alpha} [-2x+11-(-x^3+x+9)]dx + \int_{\alpha}^{\frac{11}{2}} (-2x+11)\,dx =$$

$$= \int_1^{\alpha} [-2x+11+x^3-x-9]dx + \int_{\alpha}^{\frac{11}{2}} (-2x+11)\,dx =$$

$$= \int_1^{\alpha} [x^3-3x+2]dx + \int_{\alpha}^{\frac{11}{2}} (-2x+11)\,dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\Bigg|_1^{\alpha} + (-x^2+11x)\Bigg|_{\alpha}^{\frac{11}{2}} =$$

$$= \frac{\alpha^4}{4} - \frac{3}{2}\alpha^2 + 2\alpha - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2 + \left(-\frac{121}{4} + \frac{121}{2} + \alpha^2 - 11\alpha\right) =$$

$$= \frac{\alpha^4}{4} - \frac{3}{2}\alpha^2 + 2\alpha + \frac{-1+6-8}{4} + \frac{121}{4} + \alpha^2 - 11\alpha =$$

$$= \frac{\alpha^4}{4} - \frac{1}{2}\alpha^2 - 9\alpha + \frac{121-3}{4} = \frac{\alpha^4}{4} - \frac{1}{2}\alpha^2 - 9\alpha + \frac{118}{4}$$

Abbiamo visto al punto 2 che 2<α<2.5. Possiamo assumere $\alpha \approx 2.25$. Infatti:

$$f_1(2.25) = -2.25^3 + 2.25 + 9 \cong 0.14$$

Con questo valore risulta:

$$A_{Inferiore} = \frac{2.25^4}{4} - \frac{1}{2}2.25^2 - 9 \cdot 2.25 + \frac{59}{2} \cong 13.12$$

$$A_{Totale} = A_{Superiore} + A_{Inferiore} \cong \frac{1}{12} + 13.12 \cong 13.21$$

La probabilità cercata è data da:

$$p = \frac{A_{Totale}}{A_{ABC}} = \frac{13.21}{70.08} \cong 0.19 = 19\%$$

Punto 4

Scriviamo l'espressione di una funzione polinomiale di grado *n*:

$$y = p_n(x)$$

Un generico punto di questa funzione ha coordinate:

$$A = (a, p_n(a))$$

Troviamo l'equazione della retta tangente alla funzione data nel punto *A*:

$$y = mx + q$$

Dove il coefficiente angolare assume il valore della derivata prima della funzione nel punto *A*:

$$m = p_n'(a)$$

Per determinare *q* imponiamo il passaggio per il punto *A*:

$$p_n(a) = p_n'(a)a + q \quad \rightarrow \quad q = p_n(a) - p_n'(a)a$$

La retta tangente alla funzione polinomiale in un generico punto *A* ha la seguente equazione:

$$t: y = p_n'(a)x + p_n(a) - p_n'(a)a$$

Troviamo adesso l'equazione della retta perpendicolare alla retta *t* nel punto *A* e passante per l'origine. Partiamo dall'equazione di una retta passante per il punto *A*:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - p_n(a) = m(x - a)$$

La condizione di perpendicolarità impone che sia:

$$m = -\frac{1}{p_n'(a)} \quad con\ p_n'(a) \neq 0$$

$$y - p_n(a) = -\frac{1}{p_n'(a)}(x - a)$$

Imponiamo il passaggio per l'origine:

$$-p_n(a) = -\frac{1}{p_n'(a)}(-a) \quad \rightarrow \quad a = -p_n(a)p_n'(a)$$

Abbiamo scritto un'equazione polinomiale. Il grado è dato dalla somma dei gradi dei due polinomi $p_n(a)$ e $p_n'(a)$. Quindi di grado *n+n-1=2n-1*. Ogni soluzione di questa equazione rappresenta un punto nel quale la retta normale al grafico della funzione polinomiale passa per l'origine.

Per il teorema fondamentale dell'algebra l'equazione trovata non può avere più di *2n-1* soluzioni reali quindi il grafico di un qualsiasi polinomio di grado *n* non può possedere più di *2n-1* punti nei quali la retta normale al grafico passa per l'origine.
Fin qui abbiamo imposto $p_n'(a) \neq 0$. Ora ci chiediamo: che succede se $p_n'(a) = 0$?
In questo caso la retta tangente nel punto *A* alla funzione polinomiale ha coefficiente angolare nullo e, quindi, equazione:

$$y = 0 + q$$

Cioè è parallela all'asse delle ascisse. La perpendicolare, allora, è parallela all'asse y. Quindi ha equazione:

$$x = k$$

Imponendo il passaggio per 0 si ottiene:

$$x = 0$$

Quindi l'asse y. In questo caso *a=0*.
Concludendo se $p_n'(a) = 0$ la retta cercata è l'asse delle ordinate. Costituisce una soluzione in più rispetto alle *2n-1*?
No infatti se $p_n'(a) = 0$ *a=0* è soluzione dell'equazione polinomiale:

$$a = -p_n(a)p_n'(a)$$

Concludiamo quindi che le soluzioni di questa equazione sono al massimo *2n-1* infatti tale soluzione particolare, se c'è, è già inclusa nelle precedenti.

Matilde Consales