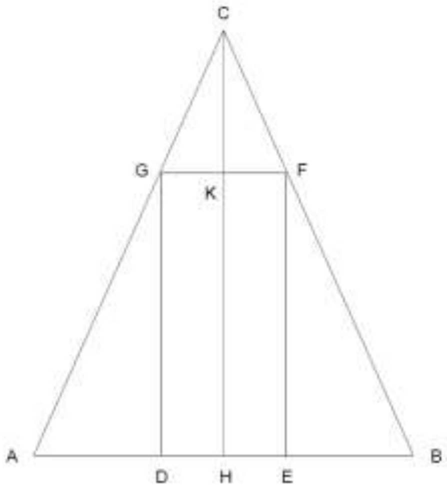
Quesito 1

Dimostrare che il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.

Svolgimento

Facciamo un disegno:



Posto $\overline{AH} = R$; $\overline{CH} = H$; $\overline{DH} = r$ e $\overline{KH} = h$. Scriviamo le espressioni del volume del cilindro e del cono:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Dobbiamo dimostrare che:

$$V_{cilindro} < \frac{1}{2} V_{cono}$$

Cioè che:

$$\frac{V_{cilindro}}{V_{cono}} < \frac{1}{2}$$

Sostituiamo in questa espressione i volumi dei solidi:

$$\frac{V_{cilindro}}{V_{cono}} = \frac{\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} = \frac{3r^2 h}{R^2 H}$$

Adesso osserviamo la figura. I triangoli *GDA* e *CHA* sono simili. Infatti sono tutti e due rettangoli ed hanno l'angolo $\hat{A}$ in comune. Ma allora possiamo scrivere:

$$\overline{GD} : \overline{CH} = \overline{AD} : \overline{AH}$$

Ma:

$$\overline{GD} = h \ \ altezza\ del\ cilindro$$

$$\overline{CH} = H\ altezza\ del\ cono$$

$$\overline{AH} - \overline{AD} = r \ \ raggio\ della\ base\ del\ cilindro$$

$$\overline{AH} = R \ \ raggio\ della\ base\ del\ cono$$

Quindi:

$$\overline{AD} = \overline{AH} - r = R - r$$

Sostituendo nella proporzione:

$$h{:}H = (R-r){:}R \quad \rightarrow \quad \frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$$

Sostituiamo questa relazione nell'espressione del rapporto tra volumi:

$$\frac{V_{cilindro}}{V_{cono}} = \frac{3r^2}{R^2}\frac{R-r}{R}$$

$$f(V) = \frac{3r^2(R-r)}{R^3} = \frac{3Rr^2 - 3r^3}{R^3}$$

Adesso consideriamo r come variabile e troviamo il massimo di questa funzione:

$$f(r) = \frac{3Rr^2 - 3r^3}{R^3}$$

Troviamo la derivata prima:

$$f'(r) = \frac{6rR - 9r^2}{R^3}$$

E vediamo per quali valori di r si annulla:

$$f'(r) = 0 \ \rightarrow \ 6rR - 9r^2 = 0 \quad \rightarrow \quad r(6R - 9r) = 0$$

$$r_1 = 0 \ \ r_2 = \frac{6}{9}R = \frac{2}{3}R$$

La funzione data è crescente per $0 < r < \frac{2}{3}R$ e decrescente per $r < 0$; $r > \frac{2}{3}R$ quindi $r = \frac{2}{3}R$ è un massimo. Calcoliamo il valore della funzione in questo punto:

$$f\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{3R\left(\frac{2}{3}R\right)^2 - 3\left(\frac{2}{3}R\right)^3}{R^3} = \frac{3\frac{4}{9}R^3 - 3\frac{8}{27}R^3}{R^3} = \frac{4}{3} - \frac{8}{9} = \frac{12-8}{9} = \frac{4}{9}$$

Ma:

$$\frac{4}{9} < \frac{1}{2}$$

Quindi il volume di un cilindro inscritto in un cono è minore della metà del volume del cono.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales