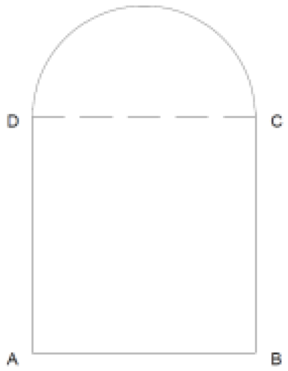
Quesito 5

Con una staccionata lunga 2 metri si vuole recintare una superficie avente la forma di un rettangolo sormontato da una semicirconferenza, come in figura:

Determinare le dimensioni dei lati del rettangolo che consentono di recintare la superficie di area massima.

Svolgimento

Ridisegniamo la figura:



Poniamo:

$$\overline{AB} = x \quad \overline{BC} = y$$

Il perimetro della superficie di figura vale:

$$Perimetro = x + 2y + \pi\frac{x}{2} = 2y + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x$$

Il perimetro deve essere uguale a 2:

$$2y + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x = 2$$

Da questa equazione ricaviamo *y*:

$$2y = 2 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x$$

Adesso troviamo l'area:

$$A = xy + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 \pi$$

Sostituiamo a *y* il valore ricavato in funzione di *x*:

$$A = x\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)x\right] + \frac{1}{2}\frac{x^2}{4}\pi$$

$$A = x\left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}x\right] + \frac{1}{8}\pi x^2$$

$$A = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\pi x^2 + \frac{1}{8}\pi x^2$$

$$A = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\pi\right)x^2 + x$$

Adesso dobbiamo determinare per quale valore di *x* quest'area risulta massima. Consideriamo la derivata prima:

$$\frac{dA}{dx} = -2\frac{4+\pi}{8}x + 1 = -\frac{4+\pi}{4}x + 1$$

Troviamo per quale valore di *x* si annulla:

$$-\frac{4+\pi}{4}x + 1 = 0$$

$$-(4+\pi)x + 4 = 0$$

$$x = \frac{4}{4+\pi}$$

Poiché:

$$se\ x < \frac{4}{4+\pi} \qquad \frac{dA}{dx} > 0\ \ la\ funzione\ \text{è}\ crescente$$

$$se\ x > \frac{4}{4+\pi} \qquad \frac{dA}{dx} < 0\ \ la\ funzione\ \text{è}\ decrescente$$

Il punto:

$$x = \frac{4}{4+\pi}$$

È un massimo. Possiamo calcolare le dimensioni del rettangolo:

$$y = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\frac{4}{4+\pi}$$

$$y = 1 - \frac{2+\pi}{2}\frac{2}{4+\pi} = 1 - \frac{2+\pi}{4+\pi} = \frac{4+\pi-2-\pi}{4+\pi} = \frac{2}{4+\pi}$$

Lati del rettangolo:

$$\overline{AB} = \frac{4}{4+\pi} \qquad \overline{BC} = \frac{2}{4+\pi}$$

Matilde Consales