Quesito 8

In un gioco a due giocatori, ogni partita vinta frutta 1 punto e vince chi per primo raggiunge 10 punti. Due giocatori che in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere si sfidano. Qual è la probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12?

Svolgimento

Per risolvere questo quesito possiamo usare una variabile aleatoria binomiale. Infatti:

- Ad ogni prova (partita) si hanno due esiti possibili (vince il giocatore 1 oppure vince il giocatore 2);
- La probabilità che vinca uno qualsiasi dei due giocatori è costante (in ciascuna partita hanno la stessa probabilità di vincere);
- I risultati sono indipendenti (il fatto che uno dei due giocatori abbia vinto o perso una partita non influenza il risultato delle partite successive).

La probabilità che uno dei due giocatori vinca in un numero di partite minore o uguale a 12 è data dalla somma delle probabilità che uno dei due vinca tutte e 10 le partite, che vinca 10 partite su 11 e che vinca 10 partite su 12.
Indichiamo con p la probabilità che vinca il primo giocatore e con q la probabilità che vinca il secondo. Poiché in ciascuna partita i due giocatori hanno la stessa probabilità di vincere possiamo scrivere:

$$p = q = \frac{1}{2}$$

La probabilità che uno dei due giocatori vinca 10 partite su 10 è la somma della probabilità che le vinca tutte il giocatore 1 e quella che le vinca tutte il giocatore 2:

$$P_{10} = \binom{10}{10} p^{10} q^0 + \binom{10}{10} p^0 q^{10} = \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{10}} = \frac{2}{2^{10}} = \frac{1}{2^9}$$

La probabilità che uno dei due giocatori vinca 10 partite su 11 è la somma della probabilità che ne vinca 10 il giocatore 1 e quella che le vinca tutte il giocatore 2. Dobbiamo, però, tenere presente che quando un giocatore vince le prime 10 partite la gara termina. Quindi dal numero delle “undicine” dobbiamo toglierne una per il primo giocatore ed una per il secondo:

$$P_{11} = \left[\binom{11}{10} - 1\right] p^{10} q^1 + \left[\binom{11}{10} - 1\right] p^1 q^{10} =$$

$$= \left(\frac{11!}{10!\,1!} - 1\right) \frac{1}{2^{10}} \frac{1}{2} + \left(\frac{11!}{10!\,1!} - 1\right) \frac{1}{2} \frac{1}{2^{10}} =$$

$$= (11 - 1) \frac{1}{2^{11}} + (11 - 1) \frac{1}{2^{11}} = 20 \frac{1}{2^{11}} = \frac{5}{2^9}$$

Allo stesso modo determiniamo la probabilità che uno dei due giocatori vinca 10 partite su 12. Ovviamente se un giocatore vince 10 volte in 11 partite la gara termina:

$$P_{12} = \left[\binom{12}{10} - \binom{11}{10}\right] p^{10} q^2 + \left[\binom{12}{10} - \binom{11}{10}\right] p^2 q^{10}$$

$$= \left(\frac{12!}{10!\,2!} - \frac{11!}{10!\,1!}\right) \frac{1}{2^{10}} \frac{1}{2^2} + \left(\frac{12!}{10!\,2!} - \frac{11!}{10!\,1!}\right) \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^{10}} =$$

$$= \left(\frac{12 \cdot 11}{2} - 11\right)\frac{1}{2^{12}} + \left(\frac{12 \cdot 11}{2} - 11\right)\frac{1}{2^{12}} = 2(66 - 11)\frac{1}{2^{12}} = \frac{55}{2^{11}}$$

Troviamo infine la probabilità richiesta:

$$P = P_{10} + P_{11} + P_{12} = \frac{1}{2^9} + \frac{5}{2^9} + \frac{55}{2^{11}} = \frac{4 + 20 + 55}{2^{11}} = \frac{79}{2^{11}}$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales