Quesito 9

Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti *A=(3,1,0)*, *B=(3,-1,2)*, *C=(1,1,2)*. Dopo aver verificato che *ABC* è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano *α* di equazione *x+y+z-4=0*, stabilire quali sono i punti *P* tali che *ABCP* sia un tetraedro regolare.

Svolgimento

Verifichiamo che il triangolo *ABC* è equilatero, cioè che:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-3)^2 + [1-(-1)]^2 + (0-2)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(1-3)^2 + (1-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

Il triangolo è equilatero. Verificiamo che è contenuto nel piano *α* cioè che:

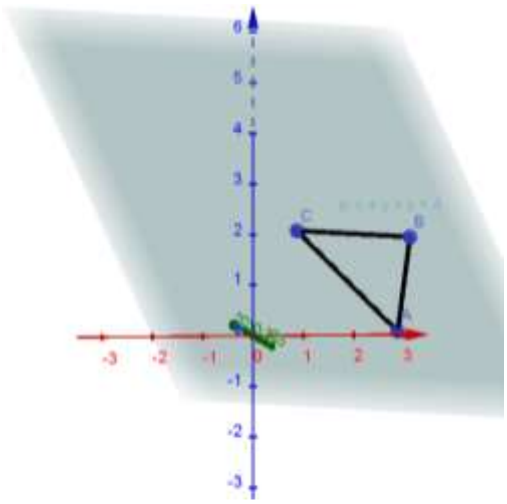
$$A \in \alpha; \mathrm{B} \in \alpha \text{ e } \mathrm{C} \in \alpha$$

$$3 + 1 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad A \in \alpha$$

$$3 - 1 + 2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad B \in \alpha$$

$$1 + 1 + 2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad C \in \alpha$$

Il triangolo appartiene al piano *α*.



Preso un punto generico *P=(x,y,z)* *ABCP* è un tetraedro regolare se tutti i suoi spigolo sono uguali cioè se:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = \overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = \sqrt{8}$$

Determiniamo *P* risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} (3-x)^2 + (1-y)^2 + z^2 = 8 \\ (3-x)^2 + (-1-y)^2 + (2-z)^2 = 8 \\ (1-x)^2 + (1-y)^2 + (2-z)^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3-x)^2+(1-y)^2+z^2=8 \\ (3-x)^2+(-1-y)^2+(2-z)^2=8 \\ (1-x)^2-(3-x)^2+(1-y)^2-(-1-y)^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3-x)^2+(1-y)^2+z^2=8 \\ (3-x)^2+(-1-y)^2+(2-z)^2=8 \\ 1-2x+x^2-9+6x-x^2+1-2y+y^2-1-2y-y^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3-x)^2+(1-y)^2+z^2=8 \\ (3-x)^2+(-1-y)^2+(2-z)^2=8 \\ -8+4x-4y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3-x)^2+(1-y)^2+z^2=8 \\ (3-x)^2+(-1-y)^2+(2-z)^2=8 \\ y=x-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3-x)^2+(1-x+2)^2+z^2=8 \\ (3-x)^2+(-1-x+2)^2+(2-z)^2=8 \\ y=x-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3-x)^2+(3-x)^2+z^2=8 \\ (3-x)^2+(1-x)^2+(2-z)^2=8 \\ y=x-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(3-x)^2+z^2=8 \\ (3-x)^2+(1-x)^2+(2-z)^2=8 \\ y=x-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18-12x+2x^2+z^2=9-6x+x^2+1-2x+x^2+4-4z+z^2 \\ (3-x)^2+(1-x)^2+(2-z)^2=8 \\ y=x-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4z-4x=-4 \\ (3-x)^2+(1-x)^2+(2-z)^2=8 \\ y=x-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=x-1 \\ 9-6x+x^2+1-2x+x^2+(2-x+1)^2=8 \\ y=x-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=x-1 \\ 2x^2-8x+10+(3-x)^2=8 \\ y=x-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=x-1 \\ 2x^2-8x+10+9-6x+x^2=8 \\ y=x-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = x - 1 \\ 3x^2 - 14x + 11 = 0 \\ y = x - 2 \end{cases}$$

Risolviamo la seconda equazione:

$$3x^2 - 14x + 11 = 0$$

$$x_{1-2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 11 \cdot 3}}{3} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 33}}{3} = \frac{7 \pm \sqrt{16}}{3} = \frac{7 \pm 4}{3}$$

$$x_1 = \frac{11}{3} \qquad x_2 = 1$$

Consideriamo la prima soluzione. Sostituendo otteniamo:

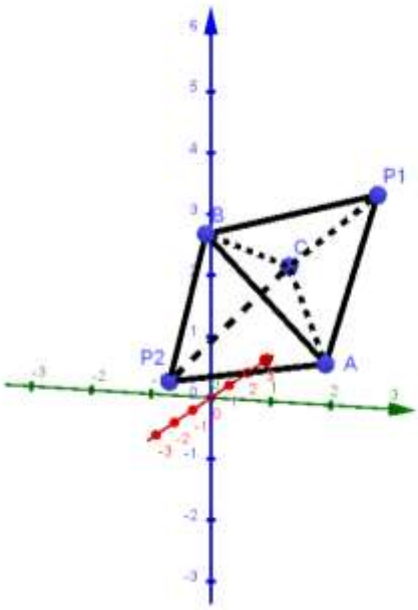
$$\begin{cases} x_1 = \frac{11}{3} \\ y_1 = \frac{5}{3} \\ z_1 = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Consideriamo la seconda soluzione. Sostituendo otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \\ z_1 = 0 \end{cases}$$

Ci sono due soluzioni quindi si ottengono due tetraedri regolari:

$$P_1 = \left(\frac{11}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right) \qquad P_2 = (1, -1, 0)$$



Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales