Problema 1

Si considerino le seguenti funzioni:

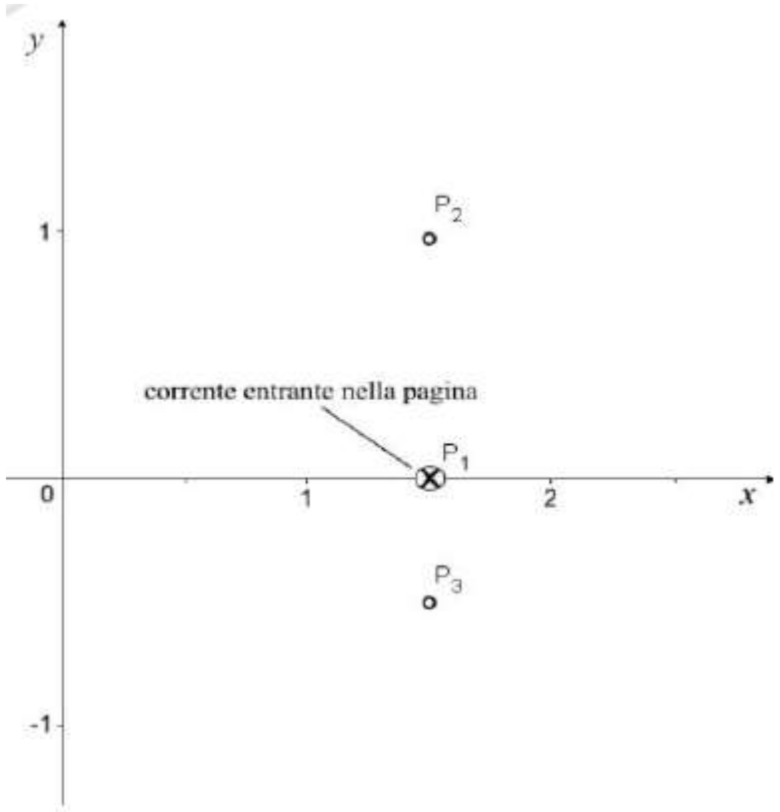
$$f(x) = ax^2 - x + b \qquad g(x) = (ax + b)e^{2x-x^2}$$

1. Provare che, comunque siano scelti i valori di a e b in $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la funzione g ammette un massimo e un minimo assoluti. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali i grafici delle due funzioni f e g si intersecano nel punto $A(2, 1)$.
2. Si assuma, d'ora in avanti, di avere a=1 e b=−1. Studiare le due funzioni così ottenute, verificando che il grafico di g ammette un centro di simmetria e che i grafici di f e g sono tangenti nel punto $B(0, -1)$. Determinare inoltre l'area della regione piana S delimitata dai grafici delle funzioni f e g.
3. Si supponga che nel riferimento Oxy le lunghezze siano espresse in metri (m). Si considerino tre fili conduttori rettilinei disposti perpendicolarmente al piano Oxy e passanti rispettivamente per i punti:

   $$P_1\left(\frac{3}{2}, 0\right) \;\; P_2\left(\frac{3}{2}, 1\right) \;\; e \;\; P_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

   I tre fili sono percorsi da correnti continue di intensità i_1=2.0A, i_2 e i_3. Il verso di i_1 è indicato in figura mentre gli altri due versi non sono indicati.

   Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico, generato dalle correnti i_1, i_2 e i_3, lungo il contorno di S, a seconda dell'intensità e del verso di i_2 e i_3.



4. Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno della regione S rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza R=0.20Ω. La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità B=1.5·10^{-2}T perpendicolare alla regione S. Facendo ruotare la spira intorno all'asse x con velocità angolare ω costante, in essa si genera una corrente indotta la cui intensità massima è pari a 5.0mA. Determinare il valore di ω.

Svolgimento

Punto 1

Consideriamo la funzione:

$$g(x) = (ax + b)e^{2x-x^2}$$

Per verificare se ammette massimo e minimi calcoliamo la derivata prima:

$$g'(x) = ae^{2x-x^2} + (2 - 2x)e^{2x-x^2}(ax + b) =$$

$$= (a + 2ax + 2b - 2ax^2 - 2bx)e^{2x-x^2} =$$

$$= [-2ax^2 + 2(a - b)x + a + 2b]e^{2x-x^2}$$

E studiamo il segno. Consideriamo il primo fattore:

$$-2ax^2 + 2(a - b)x + a + 2b \geq 0$$

$$2ax^2 - 2(a - b)x - a - 2b = 0$$

$$x_{1-2} = \frac{a - b \pm \sqrt{(a - b)^2 + 2a(a + 2b)}}{2a} = \frac{a - b \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 2a^2 + 4ab}}{2a} =$$

$$= \frac{a - b \pm \sqrt{3a^2 + 2ab + b^2}}{2a}$$

Analizziamo il trinomio sotto la radice quadrata. Possiamo scrivere:

$$3a^2 + 2ab + b^2 = 2a^2 + (a + b)^2$$

È, quindi, dato dalla somma di due quadrati e pertanto è sempre positivo $\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ e\ a \neq 0$. L'equazione ha due radici reali e distinte:

$$x_1 = \frac{a - b - \sqrt{3a^2 + 2ab + b^2}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{a - b + \sqrt{3a^2 + 2ab + b^2}}{2a}$$

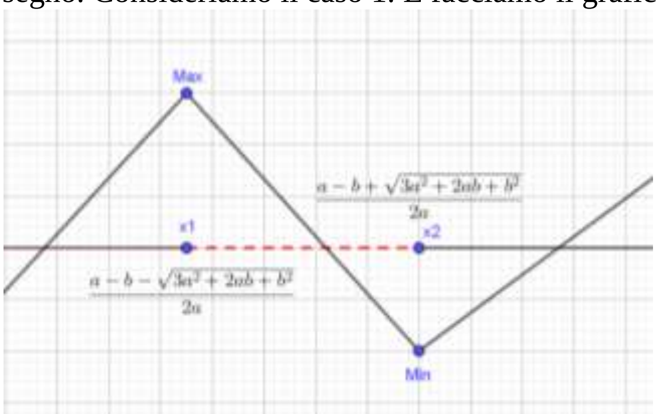
Si verificano 2 casi:

1. Se $a < 0$ questo fattore è positivo per $x < x_1 \quad x > x_2$.
2. Se $a > 0$ questo fattore è positivo per $x_1 < x > x_2$.

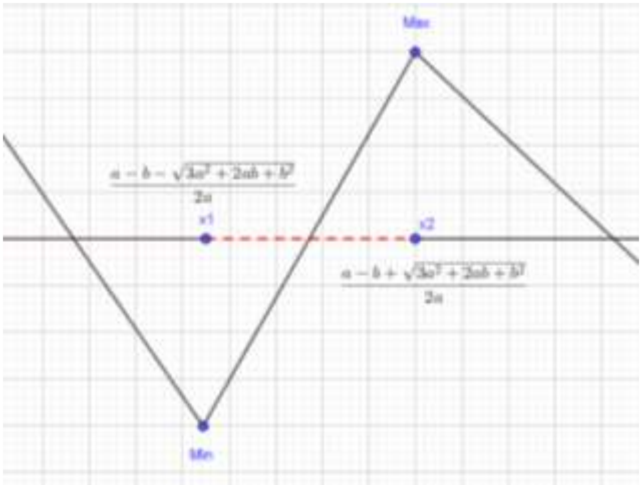
Per quanto riguarda il secondo fattore si ha:

$$e^{2x-x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi non influisce sul segno. Consideriamo il caso 1. E facciamo il grafico:



In questo caso la funzione presenta un massimo ed un minimo.
Consideriamo adesso il caso 2. Facciamo il grafico:



Anche in questo caso la funzione presenta un massimo ed un minimo. Per verificare se sono assoluti dobbiamo trovare i limiti:

$$\lim_{x\to-\infty}(ax+b)e^{2x-x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{e^{-2x+x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}(ax+b)e^{2x-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{ax+b}{e^{-2x+x^2}} = 0$$

Per calcolare i limiti dobbiamo ricordare che l'esponenziale ha un ordine di infinito superiore. La funzione in esame tende a *0* per *x* tendente a $\pm\infty$; inoltre dato che $a \neq 0$ *g(x)* non può essere ovunque nulla (nemmeno se *b=0*). Si deduce che il punto di minimo e quello di massimo sono assoluti.

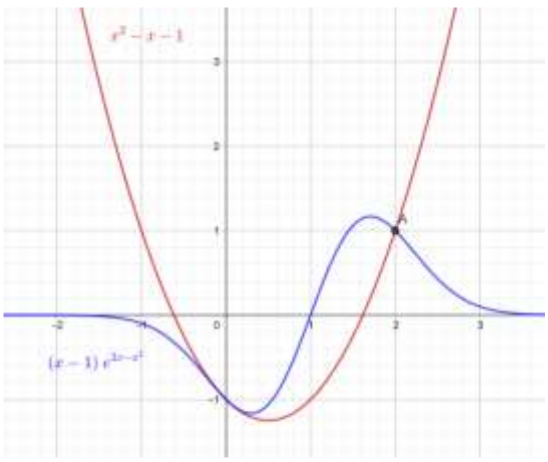
Per trovare i valori di *a* e *b* in modo che *f(x)* e *g(x)* si intersechino nel punto *A(2,1)* risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 1 = a2^2 - 2 + b \\ 1 = (2a+1)e^{2\cdot 2-2^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = 4a - 2 + b \\ 1 = (2a+1)e^{0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 1 + 2 - 4a \\ 2a = 1 + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Le due funzioni sono:

$$f(x) = x^2 - x - 1 \qquad g(x) = (x-1)e^{2x-x^2}$$

Facciamo il grafico per verificare il risultato:



Punto 2

Sostituiamo i valori proposti di a e b alle due funzioni date e studiamole separatamente'
La funzione:

$$f(x) = x^2 - x - 1$$

È una parabola con la concavità rivolta verso l'alto. Interseca l'asse delle ordinate nel punto *(-1,0)* e l'asse delle ascisse nei punti:

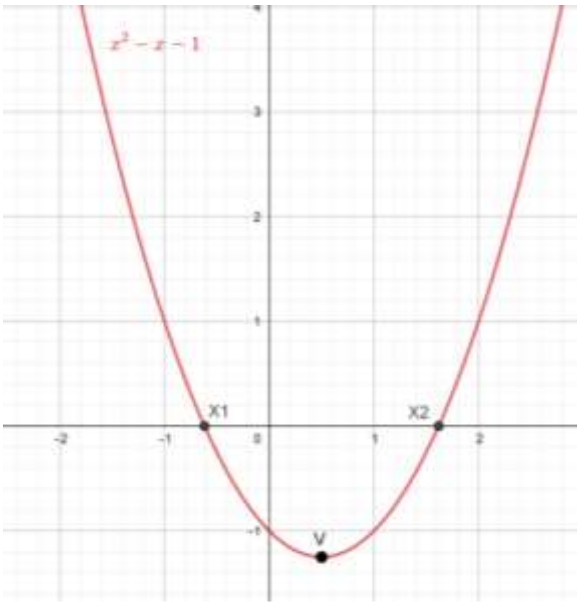
$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1-2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Il vertice della parabola ha coordinate:

$$V\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$$

Facciamo il grafico:



Consideriamo adesso la funzione:

$$g(x) = (x-1)e^{2x-x^2}$$

È definita $\forall\, x \in \mathbb{R}$ quindi non presenta asintoti verticali. Abbiamo già trovato che:

$$\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{2x-x^2} = \lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{2x-x^2} = 0$$

Quindi la funzione ha come asintoto orizzontale l'asse delle ascisse. Troviamo eventuali intersezioni con gli assi.
Asse *x*:

$$g(0) = (0-1)e^{2\cdot 0 - 0^2} = -1 \cdot e^0 = -1$$

La funzione interseca l'asse delle ascisse nel punto *(0, -1)*.
Asse *y*:

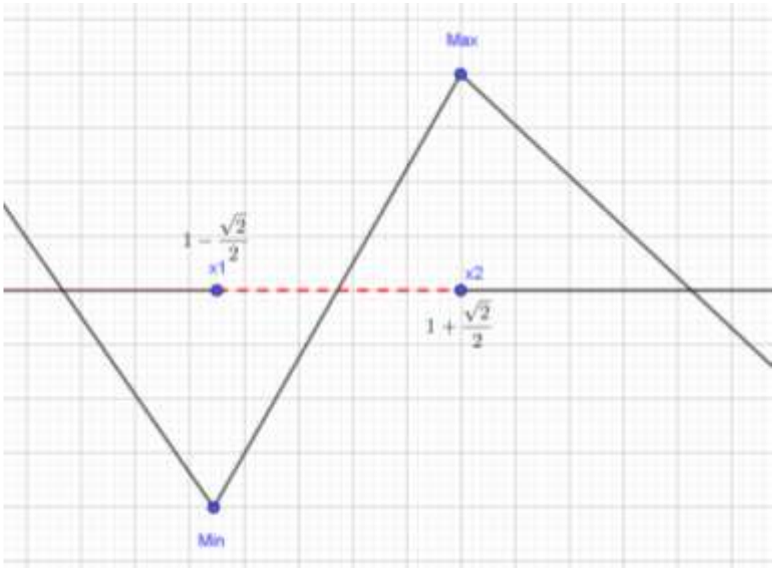
$$g(x) = (x-1)e^{2x-x^2} = 0 \ \rightarrow \ x - 1 = 0 \ \rightarrow \ x = 1$$

La funzione interseca l'asse delle ordinate nel punto *(1, 0)*.

Abbiamo già effettuato lo studio della derivata prima per la determinazione dei punti di massimo e di minimo. Per determinarli ci basta considerare il caso 2 (*a*>*0*) già studiato sostituendo $a = 1$ e $b = -1$. Si trova:

$$x_1 = \frac{1+1-\sqrt{3-2+1}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \;\; e \;\; x_2 = \frac{1+1+\sqrt{3-2+1}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

Riportiamo il grafico per comodità



La funzione presenta un minimo assoluto nel punto:

$$x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) e^{2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{1-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{1/2}$$

$$Min\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{1/2}\right)$$

Allo stesso modo troviamo il punto di massimo assoluto:

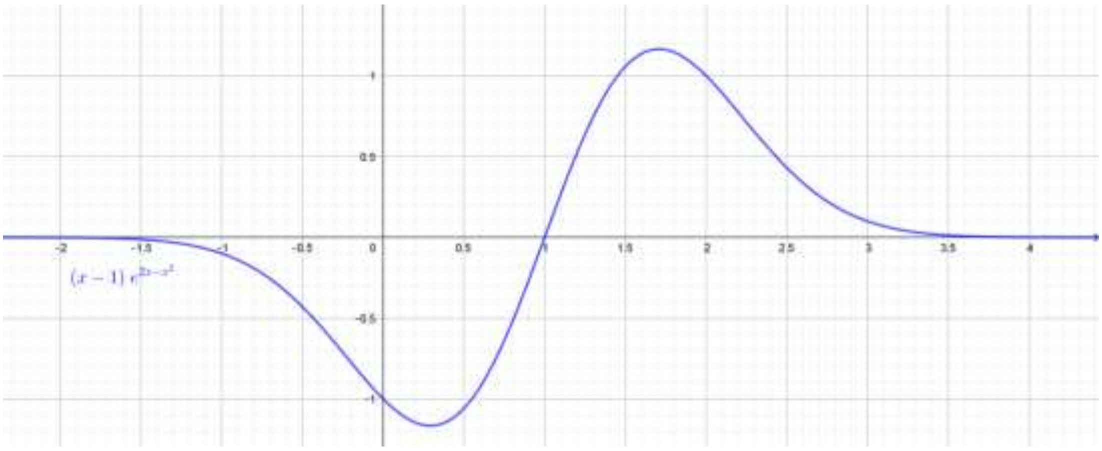
$$x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) e^{2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{1/2}$$

$$Max\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{1/2}\right)$$

Abbiamo tutti gli elementi per tracciare il grafico:



Dal grafico si vede ce la funzione ammette come centro di simmetria il punto *(1, 0)*. Per verificarlo poniamo:

$$t = x - 1 \quad \rightarrow \quad x = t + 1$$

Sostituendo si trova:

$$g(t) = (t + 1 - 1)e^{2(t+1)-(t+1)^2} = te^{2t+2-t^2-2t-1} = te^{1-t^2}$$

La funzione è dispari, infatti:

$$g(-t) = -te^{1-t^2} = g(t)$$

Essendo dispari è simmetrica rispetto all'origine. Ma:

$$se\ t = 0 \ \ x = 1$$

Quindi *g(x)* è simmetrica rispetto al punto *(1, g(1))=(1, 0)*.

Le due funzioni sono tangenti nel punto *B(0, -1)* se passano per *B* ed hanno derivate prime uguali nel punto *B*.

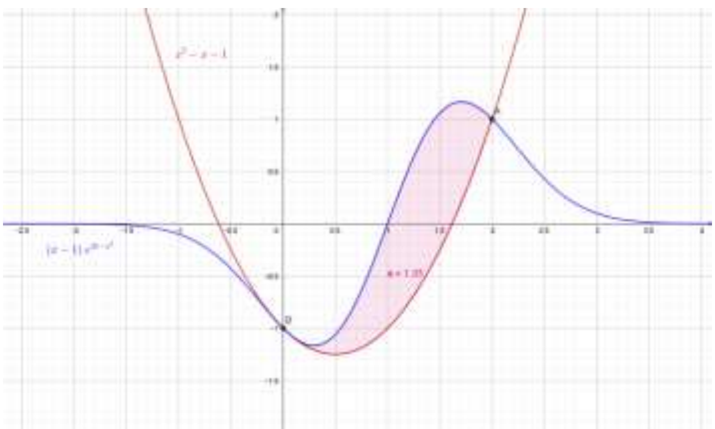
$$f(x) = x^2 - x - 1 \quad f(0) = -1 \quad passa\ per\ il\ punto\ B$$

$$g(x) = (x - 1)e^{2x-x^2} \quad g(0) = -1\ passa\ per\ il\ punto\ B$$

$$f'(x) = 2x - 1 \quad f'(0) = -1$$

$$g'(x) = e^{2x-x^2} + (x - 1)(2 - 2x)e^{2x-x^2} \quad g'(0) = 1 - 2 = -1$$

Le due funzioni sono tangenti in *B*. Disegniamo il grafico:



L’area della regione piana S delimitata dalle funzioni f e g (evidenziata in figura) è data da:

$$Area_S = \int_0^2 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_0^2 g(x)dx - \int_0^2 f(x)dx$$

Il primo integrale è nullo perché *g(x)* è una funzione dispari ed è simmetrica rispetto al punto *(1,0)* che si trova al centro dell’intervallo di integrazione. Quindi:

$$Area_S = -\int_0^2 f(x)dx = -\int_0^2 (x^2 - x - 1)dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= -\left(\frac{8}{3} - 2 - 2\right) = -\frac{16 - 12 - 12}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Punto 3

Sulla circuitazione del campo magnetico lungo il percorso S influiscono le correnti che scorrono nei fili posti all’interno dell’area delimitata da S. Vediamo quali sono. I fili percorsi da corrente sono tutti posizionati in punti con ascissa $\frac{3}{2}$ calcoliamo quindi:

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - 1 = \frac{9 - 6 - 4}{4} = -\frac{1}{4}$$

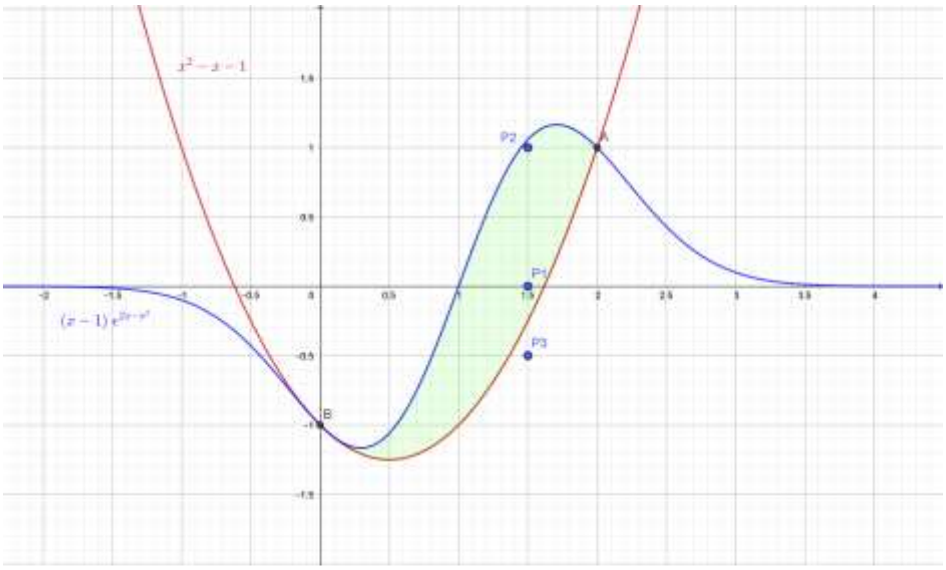
$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right)e^{2\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}e^{3-\frac{9}{4}} = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}} \cong 1.06$$

$$i_1\ passa\ per\ P_1\left(\frac{3}{2}, 0\right) \quad -\frac{1}{4} < 0 < 1.06 \quad interno$$

$$i_2\ passa\ per\ P_2\left(\frac{3}{2}, 1\right) \quad -\frac{1}{4} < 1 < 1.06 \quad interno$$

$$i_3\ passa\ per\ P_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad -\frac{1}{2} < -\frac{1}{4} \quad esterno$$

La corrente i_3 non influisce sulla circuitazione del campo magnetico lungo il percorso S. Facciamo il grafico per verifica:



La circuitazione è data da:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0(i_1 + i_2)$$

La corrente i_1 entra nella pagina ed ha intensità *2.0A*. La circuitazione è negativa se le due correnti sono concordi.

Se le correnti sono discordi dobbiamo distinguere tre casi:

a. $|i_1| > |i_2|$ la circuitazione è negativa;
b. $|i_1| = |i_2|$ la circuitazione è nulla;
c. $|i_1| < |i_2|$ la circuitazione è positiva.

Punto 4

Indichiamo con θ l'angolo formato dal versore perpendicolare alla spira e dal campo magnetico in cui è immersa. Il flusso del campo magnetico è dato da:

$$\Phi = BS\cos\theta$$

Ma se *w* è la velocità angolare della spira:

$$\theta = wt$$

Quindi:

$$\Phi = BS\cos(wt)$$

Questo flusso magnetico produce una forza elettromotrice data dalla legge di Faraday-Neumann:

$$f_{em} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d[BS\cos(wt)]}{dt} = BSw\sin(wt)$$

Applicando la derivata si è tenuto conto che la superficie racchiusa dalla spira e il campo magnetico sono costanti. A questo punto possiamo calcolare la corrente applicando la prima legge di Ohm:

$$i = \frac{f_{em}}{R} = \frac{BSw\sin(wt)}{R}$$

La corrente ha intensità massima quando:

$$\sin(wt) = 1 \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

Cioè quando il campo magnetico è ortogonale al versore perpendicolare alla spira. In questo caso, ricordando che la superficie della spira vale $1.33m^2$, si trova:

$$i_{max} = \frac{BSw}{R} \quad \rightarrow \quad w = \frac{Ri_{max}}{BS} = \frac{0.20\Omega \cdot 5 \cdot 10^{-3}A}{1.5 \cdot 10^{-2}T \cdot 1.33m^2} = 0,05rad/s$$