Quesito 1

Una data funzione è esprimibile nella forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{x^2 + d}$$

dove $d \in \mathbb{R}$ e *p(x)* è un polinomio. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e 12/5 ed ha come asintoti le rette di equazione x=3, x=−3 e y=5. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi della funzione f.

Svolgimento

La funzione ha come asintoti verticali le rette di equazione x=3, x=−3 quindi deve essere:

$$\lim_{x=+3} f(x) = \pm\infty \quad e \quad \lim_{x=-3} f(x) = \pm\infty$$

ma allora il denominatore si deve annullare nei due punti x=3, x=−3 e, quindi:

$$x^2 + d = (x+3)(x-3) = x^2 - 9 \quad \rightarrow \quad d = -9$$

La funzione data, inoltre, presenta come asintoto verticale la retta *y=5* quindi si deve avere:

$$\lim_{x=\infty} f(x) = 5$$

ma allora numeratore e denominatore devono avere lo stesso grado:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

ora, dato che:

$$\lim_{x=\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + d} = a$$

Deduciamo che *a=5.*

$$p(x) = 5x^2 + bx + c$$

Passiamo ora alle altre condizioni. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e 12/5 quindi deve essere:

$$f(0) = 0 \ \ e \ \ f\left(\frac{12}{5}\right) = 0$$

È noto che una frazione è nulla se e solo se è nullo il denominatore quindi possiamo determinare gli altri coefficienti del polinomio *p(x)* risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 5 \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0 \quad passaggio\ per\ (0{,}0) \\ 5\left(\frac{12}{5}\right)^2 + b\frac{12}{5} + c = 0 \quad passaggio\ per\ \left(\frac{12}{5}, 0\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ 5\frac{144}{25} + b\frac{12}{5} + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{12}{5}b = -\frac{144}{5} \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -\frac{144}{5} \cdot \frac{5}{12} = -12 \\ c = 0 \end{cases}$$

Abbiamo determinato il numeratore della funzione proposta:

$$p(x) = 5x^2 - 12x$$

Possiamo scrivere:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 12x}{x^2 - 9}$$

Calcoliamo la derivata prima per trovare i massimi ed i minimi:

$$f'(x) = \frac{(10x - 12)(x^2 - 9) - 2x(5x^2 - 12x)}{(x^2 - 9)^2} = \frac{10x^3 - 90x - 12x^2 + 108 - 10x^3 + 24x^2}{(x^2 - 9)^2} =$$

$$= \frac{12x^2 - 90x + 108}{(x^2 - 9)^2} = 6\frac{2x^2 - 15x + 18}{(x^2 - 9)^2}$$

Determiniamo la crescenza e la decrescenza studiando il segno della derivata prima. Per prima cosa risolviamo la disequazione:

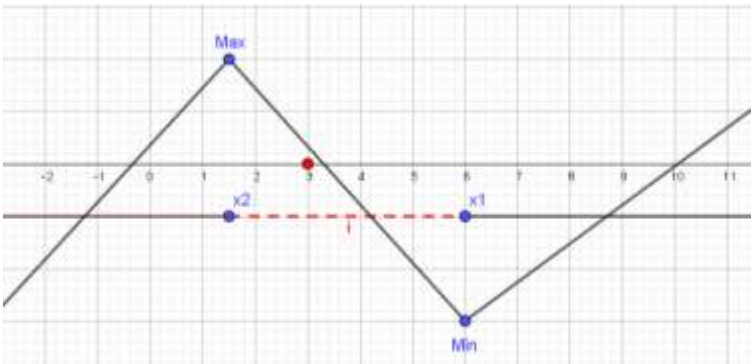
$$2x^2 - 15x + 18 \geq 0$$

$$x_{1-2} = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18}}{4} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 144}}{4} = \frac{15 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{15 \pm 9}{4}$$

$$x_1 = \frac{15 + 9}{4} = \frac{24}{4} = 6 \qquad x_2 = \frac{15 - 9}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$2x^2 - 15x + 18 > 0 \qquad per \quad x < \frac{3}{2} \quad x > 6$$

Il denominatore è sempre positivo e si annulla per $x = \pm 3$. Facciamo lo schema:



La funzione è crescente per $x < \frac{3}{2} \quad x > 6$ troviamo i valori che assume nei punti estremi:

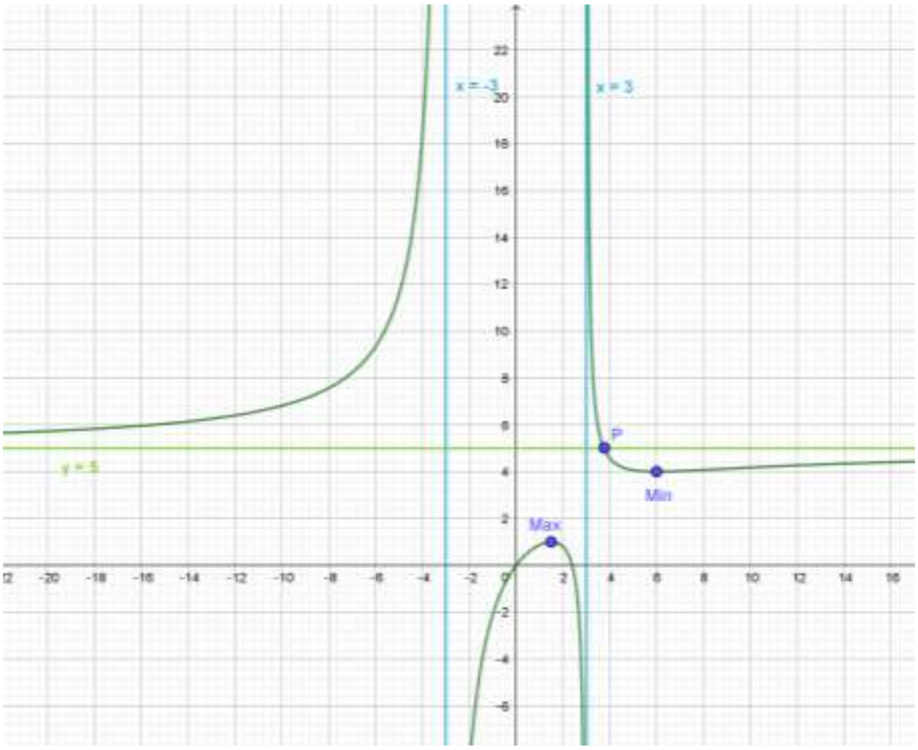
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 12\frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 9} = \frac{5\frac{9}{4} - 18}{\frac{9}{4} - 9} = \frac{\frac{45 - 72}{4}}{\frac{9 - 36}{4}} = -\frac{27}{4}\left(-\frac{4}{27}\right) = 1$$

$$f(6) = \frac{5 \cdot 6^2 - 12 \cdot 6}{6^2 - 9} = \frac{5 \cdot 36 - 72}{36 - 9} = \frac{108}{27} = 4$$

In conclusione la funzione presenta un massimo ed un minimo relativi:

$$massimo: \left(\frac{3}{2}, 1\right) \qquad minimo: (6, 4)$$

Facciamo il grafico con geogebra per verificare i risultati:



Dal grafico si vede che la funzione interseca l'asintoto orizzontale nel punto P.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales