Quesito 2

È assegnata la funzione:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2017} + x^{2019}$$

Provare che esiste un solo $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g(x_0) = 0$. Determinare inoltre il valore di

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{1.1^x}$$

Svolgimento

Consideriamo la funzione polinomiale data e raccogliamo *x*:

$$g(x) = x(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2016} + x^{2018})$$

È noto che un prodotto è nullo se almeno uno dei fattori vale zero. In questo caso se x=0 il prodotto è nullo. L'altro fattore non si annulla mai perché formato da termini tutti positivi. Si conclude che esiste un solo $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g(x_0) = 0$ e che $x_0 = 0$.

Determiniamo il limite proposto:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{1.1^x} = \frac{x}{1.1^x} + \frac{x^3}{1.1^x} + \cdots + \frac{x^{2017}}{1.1^x} + \frac{x^{2019}}{1.1^x}$$

dato che:

$$x^n < p^x \quad se\; p > 1$$

Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{1.1^x} = 0$$

Ma allora ogni addendo tende a 0 quindi:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{1.1^x} = 0$$

Matilde Consales