

Quesito 3

Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata, con superficie totale di area S , determinare quello per cui la somma delle lunghezze degli spigoli è minima.

Svolgimento

Dato un parallelepipedo a base quadrata con spigolo di base di lunghezza l e altezza di lunghezza h la superficie totale ha area data da:

$$S = 2l^2 + 4lh$$

La somma delle lunghezze degli spigoli vale:

$$L_{spigoli} = 8l + 4h$$

Dalla prima equazione ricaviamo il valore dell'altezza:

$$4hl = S - 2l^2 \quad \rightarrow \quad h = \frac{S - 2l^2}{4l}$$

Sostituendo nella relazione che fornisce la somma delle lunghezze degli spigoli troviamo:

$$L_{spigoli} = 8l + 4 \frac{S - 2l^2}{4l} = 8l + \frac{S - 2l^2}{l}$$

Troviamo il minimo di questa funzione:

$$f'(l) = 8 + \frac{-4l \cdot l - (S - 2l^2)}{l^2} = 8 + \frac{-S - 2l^2}{l^2} = 8 - \frac{S}{l^2} - 2 = 6 - \frac{S}{l^2}$$

Troviamo il valore di l che rende minima questa funzione:

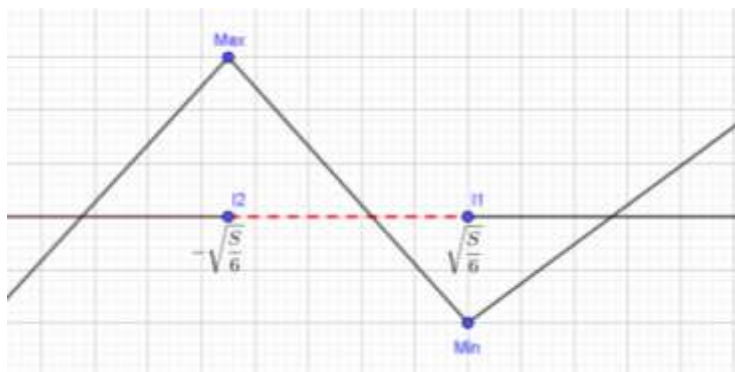
$$6 - \frac{S}{l^2} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{6l^2 - S}{l^2} > 0$$

Il denominatore, essendo un quadrato, è sempre positivo. Il segno della derivata dipende dal segno del numeratore:

$$6l^2 - S = 0 \quad \rightarrow \quad l^2 = \frac{S}{6} \quad \rightarrow \quad l_1 = \sqrt{\frac{S}{6}} \quad l_2 = -\sqrt{\frac{S}{6}}$$

$$\frac{6l^2 - S}{l^2} > 0 \quad \rightarrow \quad l < -\sqrt{\frac{S}{6}} \quad l > \sqrt{\frac{S}{6}}$$

Facciamo lo schema:



Dal grafico vediamo che la funzione presenta un minimo per:

$$l = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

Il punto $l = -\sqrt{\frac{S}{6}}$ va comunque escluso perché negativo e non rappresentativo di una lunghezza.
Troviamo l'altezza:

$$h = \frac{S - 2l^2}{4l} = \frac{S - 2\frac{S}{6}}{4\sqrt{\frac{S}{6}}} = \frac{S - \frac{S}{3}}{4\sqrt{\frac{S}{6}}} = \frac{2}{3}S \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\frac{6}{S}} = \frac{S}{6} \cdot \sqrt{\frac{6}{S}} = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

Notiamo che l'altezza è uguale allo spigolo di base quindi il solido che soddisfa le condizioni richieste è un cubo.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales