Quesito 4

Dati i punti *A(2, 0, −1)* e *B(−2, 2, 1)*, provare che il luogo geometrico dei punti *P* dello spazio, tali che

$$\overline{PA} = \sqrt{2}\overline{PB}$$

è costituito da una superficie sferica S e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto *T(−10, 8, 7)* appartiene a S e determinare l'equazione del piano tangente in T a S.

Svolgimento

Consideriamo un generico punto nello spazio *P(x,y,z)* e determiniamo le distanze dai punti *A* e *B*:

$$\overline{PA} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 + 2z + 1} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 5}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 2z + 1} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y - 2z + 9}$$

Sostituiamo nella relazione proposta:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 5} = \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8x - 8y - 4z + 18}$$

Eleviamo ambo i membri al quadrato:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 5 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8x - 8y - 4z + 18$$

Portiamo tutti i termini al secondo membro, cambiamo segno e facciamo i calcoli:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0$$

Abbiamo trovato l'equazione cartesiana di una sfera. Il luogo geometrico dei punti P descrive una superficie sferica. Troviamo le coordinate del centro ed il raggio.
Centro:

$$C\left(-\frac{12}{2}, -\frac{-8}{2}, -\frac{-6}{2}\right) = (-6, 4, 3)$$

Raggio:

$$r = \sqrt{\frac{12^2}{4} + \frac{(-8)^2}{4} + \frac{(-6)^2}{4} - 13} = \sqrt{\frac{144}{4} + \frac{64}{4} + \frac{36}{4} - 13} = \sqrt{36 + 16 + 9 - 13} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Per verificare che il punto T(-10, 8, 7) appartiene alla sfera sostituiamo le sue coordinate nell'equazione trovata.

$$(-10)^2 + 8^2 + 7^2 + 12(-10) - 8 \cdot 8 - 6 \cdot 7 + 13 =$$

$$= 100 + 64 + 49 - 120 - 64 - 42 + 13 = 0$$

Abbiamo verificato che il punto appartiene alla superficie sferica. Per trovare il piano tangente alla sfera nel punto *T* dobbiamo trovare la direzione ortogonale al raggio $\overline{TC}$:

$$\bar{v} = (x_T - x_C, y_T - y_C, z_T - z_C) = (-10 + 6, 8 - 4, 7 - 3) = (-4, 4, 4)$$

Scriviamo ora l'equazione di un piano generico parallelo al vettore $\bar{v}$:

$$\alpha: \; -4x + 4y + 4z + d = 0$$

Determiniamo infine il piano cercato imponendo il passaggio per il punto *T*:

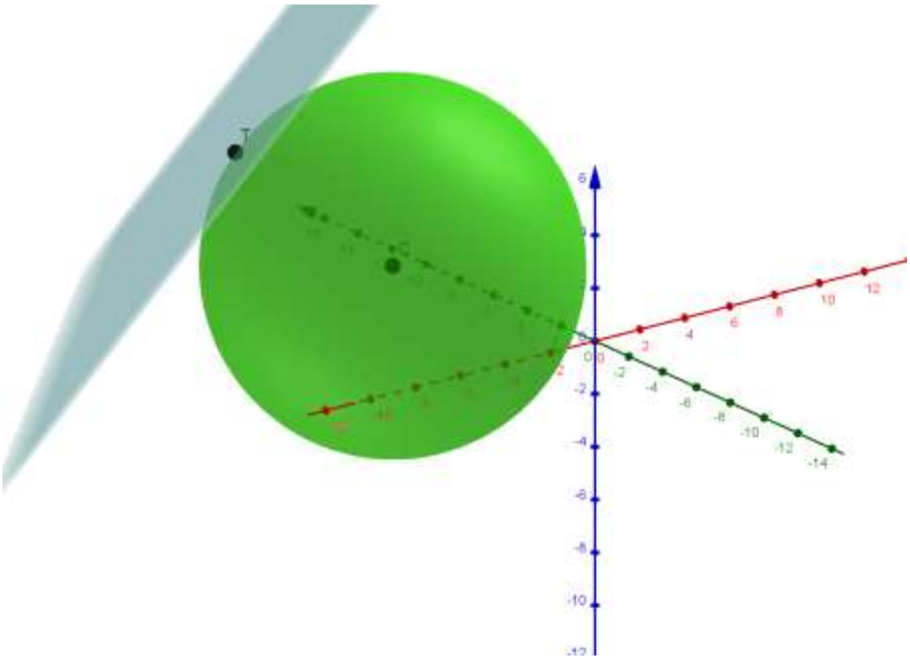
$$-4(-10) + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + d = 0$$

$$40 + 32 + 28 + d = 0 \quad \rightarrow \quad 100 + d = 0 \quad \rightarrow \quad d = -100$$

Il piano tangente alla sfera data e passante per *T* ha equazione:

$$\alpha: \; -4x + 4y + 4z - 100 = 0$$

Verifichiamo la correttezza della soluzione con un grafico:



Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales