Quesito 8

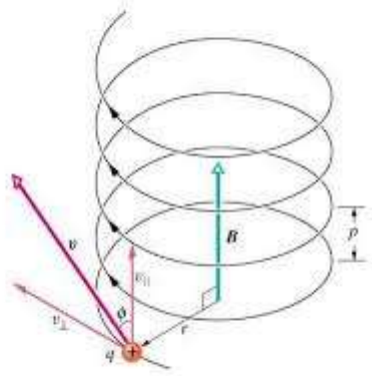
Un protone penetra in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme di modulo $|\vec{B}| = 1.00mT$. Esso inizia a muoversi descrivendo una traiettoria ad elica cilindrica, con passo costante Δx=38.1cm, ottenuta dalla composizione di un moto circolare uniforme di raggio r=10.5cm e di un moto rettilineo uniforme. Determinare il modulo del vettore velocità e l'angolo che esso forma con $\vec{B}$.

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
massa del protone	m_p	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg
velocità della luce	c	$2{,}998 \cdot 10^{8}$ m/s

Svolgimento

Il protone si muove nella regione di spazio in cui è presente il campo magnetico con una velocità $\vec{v}$ dovuta alla composizione del moto circolare uniforme e del moto rettilineo uniforme. Per trovare il modulo di questa velocità dobbiamo scomporla in due componenti ortogonali tra loro:

- La componente data dalla velocità tangenziale del moto circolare uniforme;
- La componente data dal moto rettilineo uniforme.



(b)

Il modulo della velocità è dato da:

$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2} \quad (1)$$

Analizziamo i due moti separatamente. Il moto circolare uniforme si svolge sul piano ortogonale all'asse dell'elica ed è dovuto alla forza di Lorenz che vale in modulo:

$$|\vec{F_L}| = qv_{\perp}B$$

Dove q è la carica del protone, v_T la sua velocità tangenziale e B l'intensità del campo magnetico. Sulla particella agisce anche la forza centripeta data da:

$$|\vec{F_C}| = \frac{mv_{\perp}^2}{r}$$

Uguagliando queste due forze otteniamo:

$$qv_{\perp}B = \frac{mv_{\perp}^2}{r}$$

Consideriamo adesso il moto rettilineo uniforme che avviene lungo una direzione parallela all'asse dell'elica. Ad ogni giro completo la particella si sposta della quantità Δx. Quindi:

$$\Delta x = v_{\parallel} T \quad (2)$$

Dove T è il tempo impiegato dalla particella a percorrere un giro completo e, quindi, il periodo del moto circolare uniforme:

$$T = \frac{2\pi r}{v_{\perp}}$$

Sostituendo nella (1) otteniamo:

$$\Delta x = v_{\parallel} \frac{2\pi r}{v_{\perp}}$$

Troviamo le due componenti della velocità del protone risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} q v_{\perp} B = \dfrac{m v_{\perp}^2}{r} \\ \Delta x = v_{\parallel} \dfrac{2\pi r}{v_{\perp}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} qB = \dfrac{m v_{\perp}}{r} \\ \Delta x = v_{\parallel} \dfrac{2\pi r}{v_{\perp}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} qBr = m v_{\perp} \\ \Delta x v_{\perp} = 2\pi r v_{\parallel} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{\perp} = \dfrac{qBr}{m} \\ \Delta x \dfrac{qBr}{m} = 2\pi r v_{\parallel} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{\perp} = \dfrac{qBr}{m} \\ \Delta x qBr = 2\pi r m v_{\parallel} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{\perp} = \dfrac{qBr}{m} \\ v_{\parallel} = \dfrac{\Delta x qB}{2\pi m} \end{cases}$$

Sostituendo i valori numerici troviamo:

$$\begin{cases} v_{\perp} = \dfrac{1.602 \cdot 10^{-19} C \cdot 10^{-3} T \cdot 10.5 \cdot 10^{-2} m}{1.673 \cdot 10^{-27} kg} \cong 10054\, m/s \\ v_{\parallel} = \dfrac{38.1 \cdot 10^{-2} \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} C \cdot 10^{-3} T}{2\pi \cdot 1.673 \cdot 10^{-27} kg} \cong 5086\, m/s \end{cases}$$

Il modulo del vettore velocità vale:

$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2} = \sqrt{(10054)^2 + (5086)^2}\, m/s \cong 11267\, m/s$$

L'angolo che il vettore velocità forma con la direzione del campo magnetico vale:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = \tan^{-1} \frac{10054}{5086} \cong 63°$$

Matilde Consales