**Quesito 3**

Considerata la retta $r$ passante per i due punti $A(1, -2, 0)$ e $B(2, 3, -1)$, determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $C(1, -6, 7)$ e tangente a $r$.

**Svolgimento**

Scriviamo le equazioni cartesiane della retta:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

Sostituendo i valori dati si ottiene:

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - (-2)}{3 - (-2)} = \frac{z - 0}{-1 - 0}$$

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 2}{5} = \frac{z}{-1}$$

Quindi:

$$\begin{cases} x - 1 = \dfrac{y + 2}{5} \\ \dfrac{y + 2}{5} = -z \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 5x - 5 = y + 2 \\ y + 2 = -5z \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$r\colon \begin{cases} 5x - y - 7 = 0 \\ y + 5z + 2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow$$

Adesso dobbiamo trovare un piano ortogonale alla retta data e passante per il centro del cerchio, infatti il piano tangente alla superficie sferica è perpendicolare al raggio della sfera.
Scriviamo l'equazione generica di un piano:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Il fascio di piani ortogonali alla retta *r* ha come vettore direttore quello della retta *r*:

$$x + 5y - z + d = 0$$

Tra questi individuiamo quello passante per il centro della sfera:

$$x_C + 5y_C - z_C + d = 0$$

Sostituendo i valori si trova:

$$1 + 5(-6) - 7 + d = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - 30 - 7 + d = 0 \quad \rightarrow \quad d = 36$$

Il piano ortogonale a *r* e passante per C ha equazione:

$$x + 5y - z + 36 = 0$$

Adesso dobbiamo calcolare il raggio della sfera e, quindi, ci servono le coordinate del punto di tangenza. Si trovano risolvendo il seguente sistema composto dalle equazioni cartesiane di *r* e del piano.

$$\begin{cases} 5x - y - 7 = 0 \\ y + 5z + 2 = 0 \\ x + 5y - z + 36 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y = 5x - 7 \\ 5x - 7 + 5z + 2 = 0 \\ x + 25x - 35 - z + 36 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y = 5x - 7 \\ 5x + 5z - 5 = 0 \\ 26x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5x - 7 \\ z = 26x + 1 \\ x + 26x + 1 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 27x = 0 \\ y = 5x - 7 \\ z = 26x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -7 \\ z = 1 \end{cases}$$

Coordinate del punto di tangenza:

$$T(0, -7, 1)$$

Adesso dobbiamo calcolare la misura del raggio, cioè la distanza tra il centro della sfera ed il punto di tangenza:

$$r_{sfera} = \sqrt{(x_C - x_T)^2 + (y_C - y_T)^2 + (z_C - z_T)^2} =$$

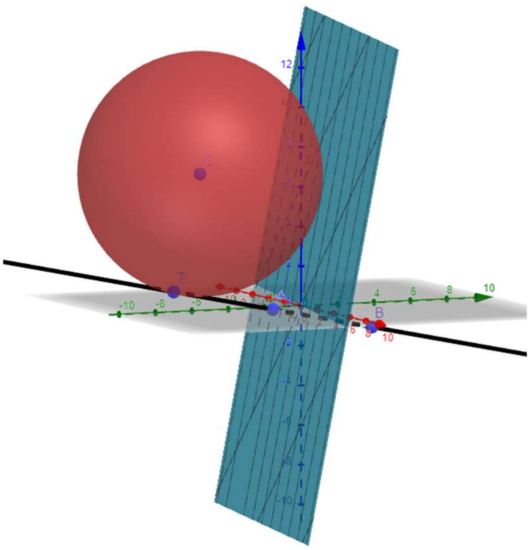
$$= \sqrt{(1 - 0)^2 + \left(-6 - (-7)\right)^2 + (7 - 1)^2} = \sqrt{1 + 1 + 36} = \sqrt{38}$$

Infine scriviamo l'equazione della sfera:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r_{sfera}^2$$

In questo caso:

$$(x - 1)^2 + (y + 6)^2 + (z - 7)^2 = 38$$



Matilde Consales