Quesito 4

Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume V, stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.

Svolgimento

Il volume di un parallelepipedo a base quadrata è dato da:

$$V = l^2 h$$

Dove l è il lato del quadrato che costituisce la base e h è l'altezza. Troviamo adesso l'espressione dell'altezza:

$$h = \frac{V}{l^2}$$

l'area totale è:

$$A_{Tot} = 2l^2 + 4lh$$

Sostituendo ad h il valore in funzione del volume si trova:

$$A_{Tot} = 2l^2 + 4l\frac{V}{l^2} = 2l^2 + \frac{4V}{l}$$

Troviamo adesso per quale valore del lato di base si ha l'area totale minima. Calcoliamo la derivata prima rispetto a l:

$$\frac{\partial A_{Tot}}{\partial l} = 4l - \frac{4V}{l^2} = 4\frac{l^3 - V}{l^2}$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$4\frac{l^3 - V}{l^2} \geq 0 \quad \rightarrow \quad l^3 - V \geq 0 \quad \rightarrow \quad l \geq \sqrt[3]{V}$$

La derivata prima si annulla per $l = \sqrt[3]{V}$ per $l < \sqrt[3]{V}$ è decrescente e per $l > \sqrt[3]{V}$ è crescente. Quindi il punto $l = \sqrt[3]{V}$ è un minimo.

Eseguiamo lo stesso procedimento per la diagonale che si trova con la seguente espressione:

$$d = \sqrt{2l^2 + h^2}$$

Sostituiamo ad h la relazione trovata prima:

$$d = \sqrt{2l^2 + \frac{V^2}{l^4}}$$

Possiamo elevare al quadrato ambo i membri di questa equazione per semplificare i calcoli:

$$d^2 = 2l^2 + \frac{V^2}{l^4}$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$\frac{\partial d^2}{\partial l} = 4l - 4\frac{V^2}{l^5}$$

Studiamo il segno:

$$4l - 4\frac{V^2}{l^5} \geq 0 \quad \rightarrow \quad 4\,\frac{l^6 - V^2}{l^5} \geq 0$$

Poiché l è sempre positivo perché è il lato di base di un parallelepipedo la derivata prima sarà positiva se:

$$l^6 - V^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad l \geq \sqrt[6]{V^2} \quad \rightarrow \quad l \geq \sqrt[3]{V}$$

La derivata prima si annulla per $l = \sqrt[3]{V}$ per $l < \sqrt[3]{V}$ è decrescente e per $l > \sqrt[3]{V}$ è crescente. Quindi il punto $l = \sqrt[3]{V}$ è un minimo. Esattamente come prima.

Ma allora il parallelepipedo a base quadrata di volume V con area minima presenta anche la diagonale minima.

Matilde Consales