Quesito 5

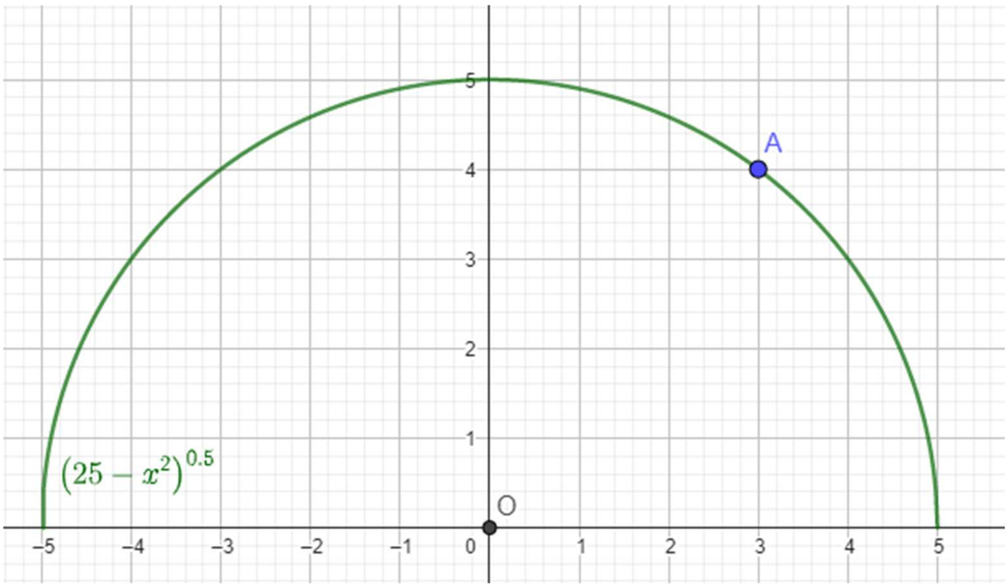
Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

nel suo punto di ascissa 3, utilizzando due metodi diversi.

Svolgimento

La curva data è la semicirconferenza con centro nell'origine e raggio 5. Dobbiamo determinare l'equazione della retta tangente nel punto A di figura.



Troviamo le coordinate del punto A risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt{25 - x^2} \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{25 - 3^2} \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{25 - 9} \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{16} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Sono richiesti due metodi per determinare la retta tangente.

Metodo 1

È noto che la retta tangente in un punto di una circonferenza è quella perpendicolare al raggio condotto per quel punto. Troviamo allora la retta sostegno del raggio OA di figura.
Consideriamo il fascio di rette passanti per l'origine. Equazione di un fascio generico di rette:

$$y = mx + q$$

Imponiamo il passaggio per il punto O=(0,0):

$$0 = m \cdot 0 + q \quad \rightarrow \quad q = 0$$

Quindi il fascio cercato è:

$$y = mx$$

Tra le infinite rette appartenenti a questo fascio scegliamo quella passante per A=(3,4):

$$4 = 3m \quad \rightarrow \quad m = \frac{4}{3}$$

Equazione della retta sostegno del raggio OA:

$$y = \frac{4}{3}x$$

Scriviamo adesso l'equazione delle rette del fascio improprio di rette perpendicolari a questa retta ricordando che il coefficiente angolare di una retta perpendicolare alla retta data è pari all'opposto del reciproco di quello della retta in questione:

$$y = -\frac{3}{4}x + q$$

Tra queste scriviamo l'equazione di quella passante per A:

$$4 = -\frac{3}{4} \cdot 3 + q \quad \rightarrow \quad 4 = -\frac{9}{4} + q \quad \rightarrow \quad q = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

Equazione della retta tangente alla curva $y = \sqrt{25 - x^2}$ nel punto di ascissa 3:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

Metodo 2

Sappiamo che il coefficiente angolare della retta tangente ad una curva è la derivata prima della curva calcolata nel punto di tangenza. Calcoliamo, allora, tale derivata:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sqrt{25 - x^2})}{dx} = -2x \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Per *x=3* otteniamo:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = 3} = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{\sqrt{25 - 9}} = -\frac{3}{\sqrt{16}} = -\frac{3}{4}$$

Adesso imponiamo il passaggio per A=(3,4). Scriviamo prima l'equazione di una generica retta appartenente a questo fascio improprio:

$$y = -\frac{3}{4}x + q$$

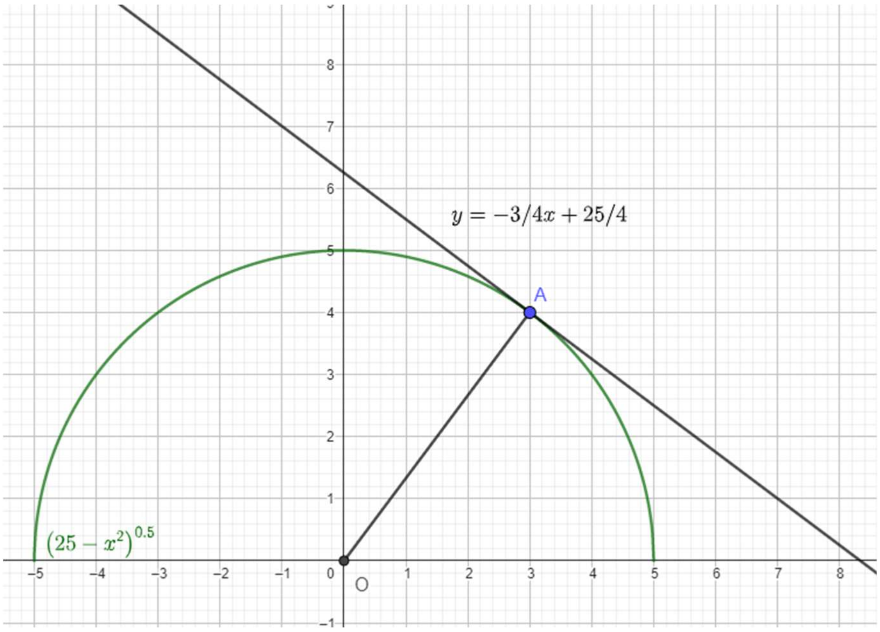
E calcoliamo *q*:

$$4 = -\frac{3}{4} \cdot 3 + q \quad \rightarrow \quad q = \frac{25}{4}$$

Equazione della retta tangente alla curva $y = \sqrt{25 - x^2}$ nel punto di ascissa 3:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$$

Completiamo il grafico con Geogebra:



Matilde Consales