Quesito 6

Determinare i valori dei parametri reali *a* e *b* affinché:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx-(ax^3+bx)}{x^3}=1$$

Svolgimento

Il limite dà luogo ad una forma indeterminata 0/0. Per risolverla scriviamo lo sviluppo in serie di Taylor della funzione *sinx* in un intorno di *x=0* (dobbiamo, infatti, calcolare il limite per x che tende a 0). Procediamo con lo sviluppo in serie di Taylor.

$$sinx=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^6)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

Ci arrestiamo qui dato che nella funzione da esaminare non sono presenti termini di grado superiore al terzo. Facciamo la sostituzione:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-(ax^3+bx)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(a+\frac{1}{6}\right)x^3+(1-b)x+o(x^3)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\left(a+\frac{1}{6}\right)x^3}{x^3}+\frac{(1-b)x}{x^3}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right]$$

Si vede che il secondo termine tende ad infinito per *x* che tende a zero. Lo possiamo eliminare ponendo *b=1*:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\left(a+\frac{1}{6}\right)x^3}{x^3}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right]=-a-\frac{1}{6}$$

Infatti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}=0$$

Ma allora dobbiamo trovare a tale che:

$$-a-\frac{1}{6}=1\quad\rightarrow\quad -a=1+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}\quad\rightarrow\quad a=-\frac{7}{6}$$

I valori richiesti sono:

$$a=-\frac{7}{6},\ \ b=1$$

Matilde Consales