Quesito 7

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + arctgx & se \quad x < 0 \\ ax + b & se \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Determinare per quali valori dei parametri reali a, b la funzione è derivabile. Stabilire se esiste un intervallo di $\mathbb{R}$ in cui la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.

Svolgimento

La funzione è continua e derivabile negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ per qualsiasi valore reale di a e b. Dobbiamo trovare per quali valori di queste due costanti è continua nel punto $x=0$. Calcoliamo i limiti sinistro e destro.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-1 + arctgx) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (ax + b) = b$$

La funzione è continua in $x=0$ se questi due limiti coincidono, quindi deve essere:

$$b = -1$$

Studiamo adesso la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + arctgx & se \quad x < 0 \\ ax - 1 & se \quad x \geq 0 \end{cases}$$

E troviamo per quali valori di a è derivabile nel punto $x=0$. Calcoliamo le derivate prime sinistra e destra:

$$f'_-(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$f'_+(x) = a$$

La funzione è derivabile se i limiti sinistro e destro nel punto $x=0$ sono uguali. Calcoliamo questi limiti:

$$\lim_{x\to 0^-} f'_-(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2 + 1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'_+(x) = \lim_{x\to 0^+} a = a$$

Si vede che sono uguali se $a=1$. Quindi la funzione cercata è data da:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + arctgx & se \quad x < 0 \\ x - 1 & se \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Riportiamo l'enunciato del teorema di Rolle per semplicità:

IPOTESI:

Sia $f: R \to R$

- continua in un intervallo *[a,b]* chiuso e limitato
- derivabile nell'intervallo *(a,b)* aperto e limitato
- *f(a)=f(b)*

TESI:

Esiste un punto $c \epsilon (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

La funzione trovata è continua in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \epsilon R$ ed è anche derivabile in ogni intervallo aperto e limitato $(a, b) \epsilon R$ ma non esistono due punti $a, b \epsilon R\ tali\ che\ f(a) = f(b)$, lo possiamo vedere graficamente:

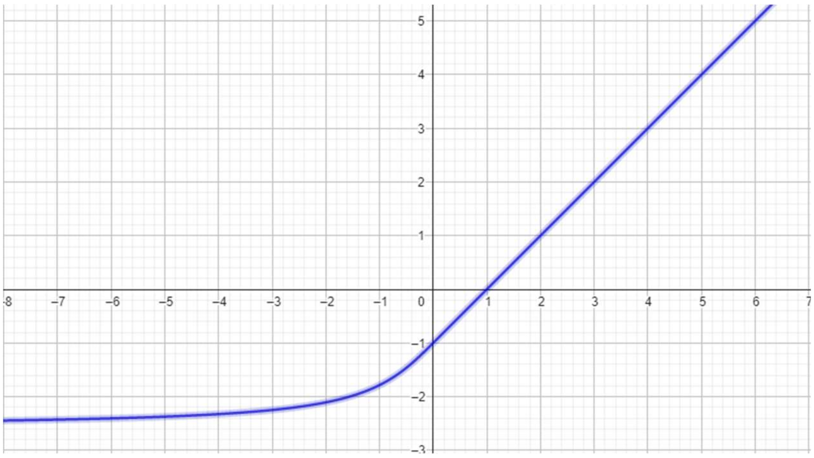

Figura 1 Grafico di f(x)

La funzione non soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle.

Matilde Consales