Quesito 8

Data la funzione:

$$f_a(x) = x^5 - 5ax + a$$

definita nell'insieme dei numeri reali, stabilire per quali valori del parametro a>0 la funzione possiede tre zeri reali distinti.

Svolgimento

Per stabilire se la funzione presenta almeno uno zero calcoliamo i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 5ax + a) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^5 - 5ax + a) = +\infty$$

La funzione cambia di segno quindi ha almeno uno zero. Calcoliamo la derivata prima:

$$f_a'(x) = 5x^4 - 5a$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$f_a'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad x^4 - a > 0 \quad \rightarrow \quad x < -\sqrt[4]{a}; \quad x > \sqrt[4]{a}$$

La funzione presenta un massimo per $x = -\sqrt[4]{a}$ e un minimo per $x = \sqrt[4]{a}$. La funzione intersecherà ancora l'asse *x* se il punto di massimo sarà positivo ed il punto di minimo sarà negativo, quindi se:

$$f_a(-\sqrt[4]{a}) = -\sqrt[4]{a^5} - 5a(-\sqrt[4]{a}) + a = -a\sqrt[4]{a} + 5a\sqrt[4]{a} + a = 4a\sqrt[4]{a} + a = a(4\sqrt[4]{a} + 1) > 0$$

$$a > 0 \text{ è } \mathit{un\ dato\ del\ problema}\ 4\sqrt[4]{a} + 1 > 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt[4]{a} > -\frac{1}{4} \ \mathit{sempre}$$

Il punto di massimo è positivo per qualsiasi valore di *a*.

$$f_a(\sqrt[4]{a}) = \sqrt[4]{a^5} - 5a\sqrt[4]{a} + a = -4a\sqrt[4]{a} + a = a(1 - 4\sqrt[4]{a}) < 0$$

$$a > 0 \text{ è } \mathit{un\ dato\ del\ problema}\ 1 - 4\sqrt[4]{a} < 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt[4]{a} > \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad a > \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$$

La funzione presenta tre zeri reali per $a > \frac{1}{256}$.

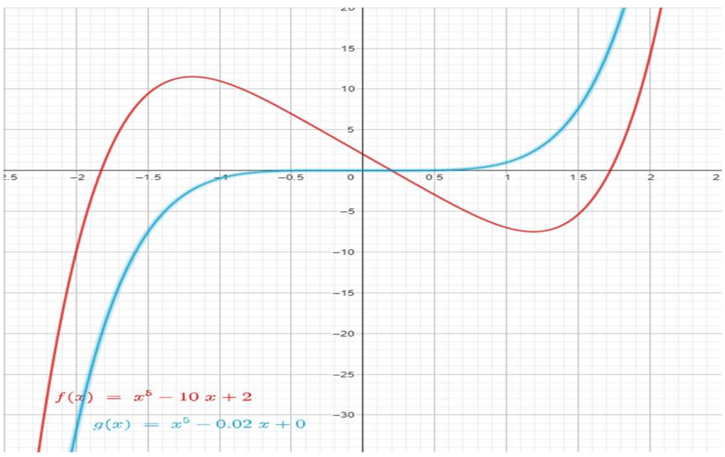

Figura 1 Grafico per a=2 e a=1/300

In figura 1 sono riportati i grafici per *a=2* e per *a=1/300* si vede che la funzione per *a=2* presenta tre zeri reali (in rosso) e quella per *a=1/300* ha un solo zero reale. In figura 2 si riporta il particolare del grafico della funzione per a=1/400.

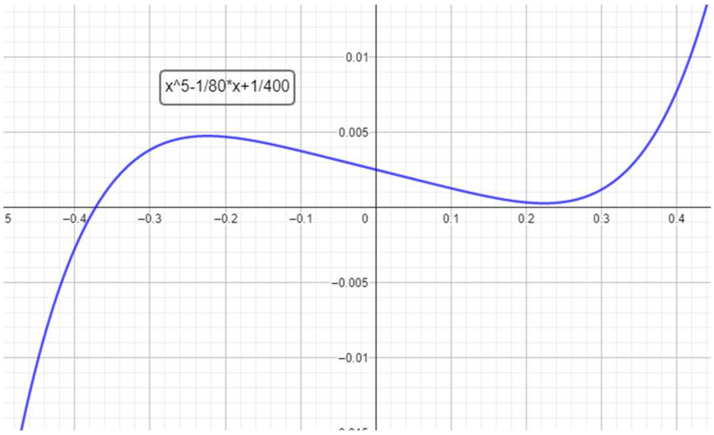

Figura 2 Particolare di f(x) per a=1/400

Matilde Consales