Esercizio 1

Data in un sistema di assi coordinati cartesiani la parabola di equazione:

$$y = x^2 + 2x + 1$$

si scriva l'equazione della retta che, nella regione finita di piano limitata dalla stessa parabola e dagli assi, sia tangente alla curva e formi con gli assi stessi il triangolo di area massima.

Svolgimento:

Facciamo il grafico.

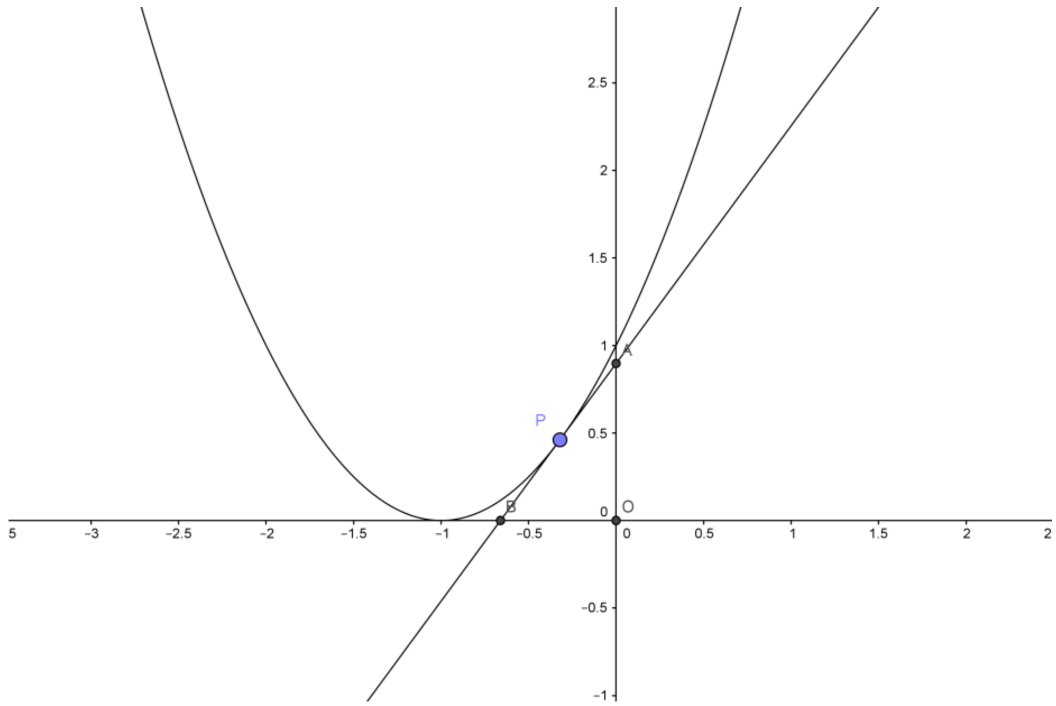

Figura 1

Scriviamo l'equazione di un fascio di rette generico con centro $P = (x_P, y_P)$:

$$y - y_P = m(x - x_P)$$

La retta deve avere il punto P in comune con la parabola quindi possiamo impostare il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 1 \\ y = m(x - x_P) + y_P \end{cases} \quad \rightarrow \quad m(x - x_P) + y_P = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + (2 - m)x + mx_P - y_p + 1 = 0 \qquad (1)$$

Ma il punto P appartiene alla parabola quindi:

$$y_P = x_p^2 + 2x_P + 1$$

Sostituendo nella (1):

$$x^2 + (2 - m)x + mx_P - x_p^2 - 2x_P - 1 + 1 = 0$$

$$x^2 + (2 - m)x + mx_P - x_p^2 - 2x_P = 0$$

Affinché la retta sia tangente alla parabola deve essere:

$$\Delta = (2 - m)^2 - 4\left(mx_P - x_p^2 - 2x_P\right) = 0$$

$$4-4m+m^2-4mx_P+4x_p^2+8x_P=0$$

$$m^2-4(1+x_P)m+4x_p^2+8x_P+4=0$$

Troviamo il coefficiente angolare *m* della retta:

$$m=2(1+x_P)\pm\sqrt{4(1+x_P)^2-4x_p^2-8x_P-4}=$$

$$=2(1+x_P)\pm\sqrt{4+8x_P+4x_P^2-4x_p^2-8x_P-4}=2+2x_P$$

Scriviamo l'equazione della retta:

$$y-x_p^2-2x_P-1=(2+2x_P)(x-x_P)$$

$$y=x_p^2+2x_P+1+2x-2x_P+2x_Px-2x_p^2$$

$$y=2(1+x_P)x-x_p^2+1$$

Ora troviamo i cateti del triangolo AOB di figura 1.
Per determinare la lunghezza di AO poniamo *x=0*:

$$AO=\left|-x_p^2+1\right|=x_p^2-1$$

Dobbiamo usare il valore assoluto perché il segmento si trova sul semiasse negativo delle ascisse
Per trovare la lunghezza di BO poniamo *y=0*:

$$BO=\frac{x_p^2-1}{2(1+x_P)}=\frac{(x_P+1)(x_P-1)}{2(x_P+1)}=\frac{x_P-1}{2}$$

Abbiamo potuto semplificare perché sicuramente $x_P\neq 1$ Infatti in questo caso P sarebbe il vertice della parabola e la retta tangente sarebbe l'asse delle ascisse. Adesso troviamo l'area del triangolo AOB.

$$A_{AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot BO=\frac{1}{2}\left(x_p^2-1\right)\frac{x_P-1}{2}=\frac{x_p^3-x_p^2-x_P+1}{4}$$

Determiniamo il valore di x_P che rende quest'area massima:

$$\frac{dA_{AOB}}{dx_P}=\frac{3x_p^2-2x_P-1}{4}\geq 0$$

$$3x_p^2-2x_P-1\geq 0 \qquad (2)$$

$$x_{P1-2}=\frac{1\pm\sqrt{1+3}}{3}=\frac{1\pm 2}{3}$$

Si trovano i seguenti valori:

$$x_{P1}=1;\quad x_{P2}=-\frac{1}{3}$$

La disequazione (2) ha come soluzioni:

$$x_P\leq-\frac{1}{3}\quad x_P\geq 1$$

Facciamo il grafico per trovare i punti di massimo e di minimo.

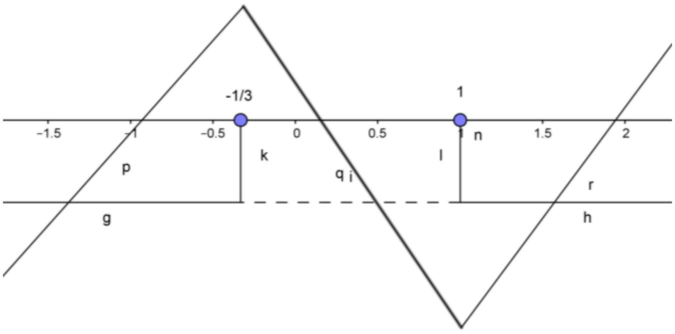

Figura 2

L'area presenta un massimo per $x_P = -\frac{1}{3}$ quindi il punto P ha coordinate:

$$x_P = -\frac{1}{3} \qquad y_P = \frac{1}{9} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{1-6+9}{9} = \frac{4}{9}$$

Il coefficiente angolare della retta cercata è data da:

$$m = 2 + 2x_P = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

L'equazione della retta cercata è data da:

$$y - \frac{4}{9} = \frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right) \quad \rightarrow \quad y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}$$

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{8}{9}$$

Possiamo rifare il grafico.

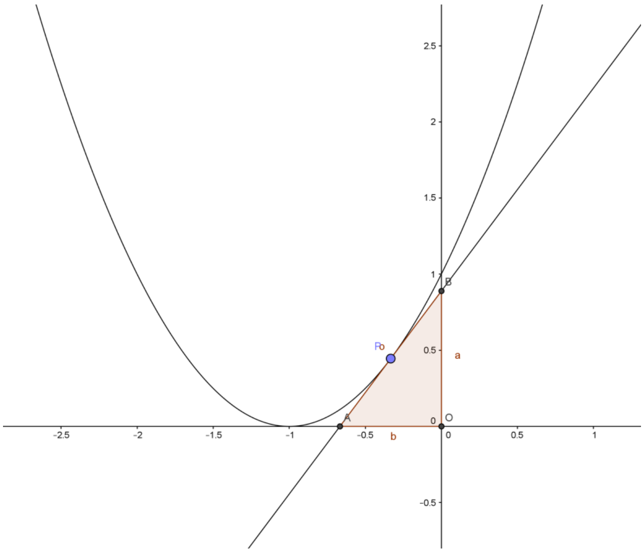

Figura 3

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales