Esercizio 2

Dato in una circonferenza di raggio r l'angolo al centro $\widehat{AOB}$ si costruisca sulla corda $\overline{AB}$, da parte opposta rispetto al centro O, il triangolo isoscele ABC avente per base $\overline{AB}$ e per altezza

$$\overline{CH} = 2k \cdot \overline{AB}.$$

Si determini il valore dell'angolo $\widehat{AOB}$ per il quale il quadrilatero OACB ha area massima.
Si calcoli poi il valore di *k* per cui l'ampiezza dell'angolo $\widehat{AOB}$ del quadrilatero ottenuto è 150°.

Svolgimento:

Facciamo il disegno.

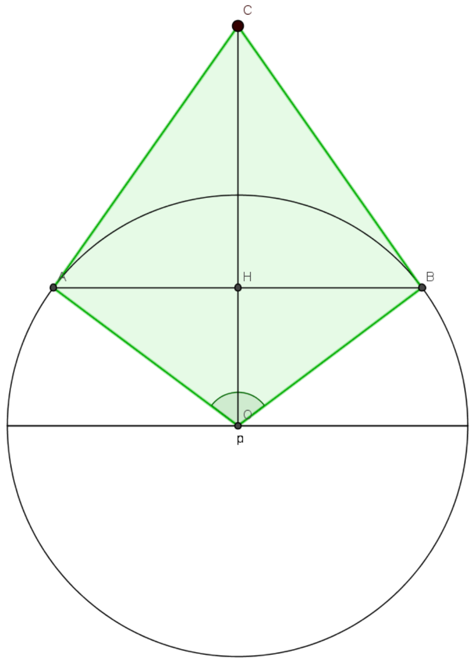

Figura 1

Poniamo $x = \widehat{AOB}$. Dato che il triangolo AOB è isoscele (infatti ha due lati dati dal raggio del cerchio) possiamo trovare la base:

$$\overline{HB} = r \cdot sin\frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad \overline{AB} = 2r \cdot sin\frac{x}{2}$$

Per quanto riguarda l'altezza si trova:

$$\overline{OH} = r \cdot cos\frac{x}{2}$$

Consideriamo adesso il triangolo ABC isoscele per costruzione. Dalla figura 1 vediamo che ha per base $\overline{AB}$ e per altezza:

$$\overline{CH} = 2k \cdot \overline{AB} = 2k \cdot 2r \cdot sin\frac{x}{2} = 4kr \cdot sin\frac{x}{2} \qquad (1)$$

Osserviamo che deve essere k>0 perché un segmento non può essere negativo.
Dobbiamo determinare x che renda massima l'area del quadrilatero colorato di verde di figura 1. Notiamo che l'area di AOBC è data da:

$$A_{AOBC} = A_{ABC} + A_{AOB} \qquad (2)$$

Dove:

$$A_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot sin\frac{x}{2} \cdot 4kr \cdot sin\frac{x}{2} = 4kr^2 sin^2\frac{x}{2}$$

$$A_{AOB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OH}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot sin\frac{x}{2} \cdot r \cdot cos\frac{x}{2} = r^2 \cdot sin\frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{2}$$

Ma ricordando che:

$$sinx = 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} \qquad \rightarrow \qquad sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} = \frac{sinx}{2}$$ [1]

Sostituendo:

$$A_{AOB} = \frac{r^2}{2} sinx$$

Sostituendo nella (2):

$$A_{AOBC} = 4kr^2 sin^2\frac{x}{2} + \frac{r^2}{2} sinx = r^2\left(4ksin^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}sinx\right)$$

Dobbiamo determinare per quali valori di x l'area è massima quindi calcoliamo la derivata prima e studiamone il segno:

$$\frac{dA_{AOBC}}{dx} = r^2\left(4k \cdot 2 \cdot sin\frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot cosx\right) =$$

$$= r^2\left(4k \cdot sin\frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot cosx\right) =$$

Di nuovo:

$$2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} = sinx$$

Quindi:

$$= r^2\left(2k \cdot sinx + \frac{1}{2} \cdot cosx\right) = \frac{r^2}{2}(4k \cdot sinx + cosx) = 0$$

Dividiamo ambo i membri di questa disequazione per $cosx$.

$$4k \cdot tgx + 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad tgx = -\frac{1}{4k}$$

Posto:

$$\alpha = arctg\left(-\frac{1}{4k}\right)$$

La disequazione:

$$tgx \geq -\frac{1}{4k}$$

È verificata per:

$$0 < x \leq \alpha$$

[1] Infatti $\sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + sin\beta cos\alpha$

Per capire meglio disegniamo il cerchio trigonometrico e rappresentiamo la tangente.

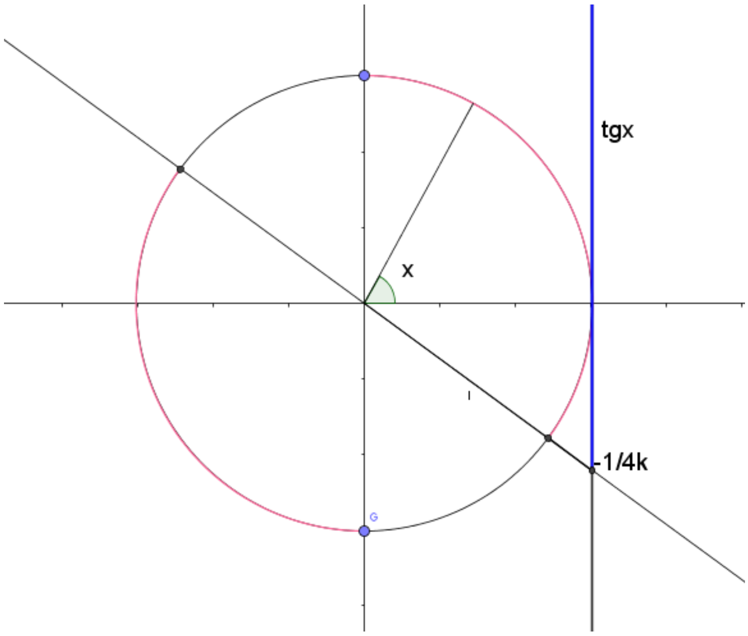

Figura 2

In figura ho evidenziato in rosso le parti di circonferenza corrispondenti agli angoli per i quali.

$$tgx \geq -\frac{1}{4k} \quad \rightarrow \quad \alpha = arctg\left(-\frac{1}{4k}\right)$$

Ora focalizziamo la nostra attenzione nell'intorno di $\alpha = arctg\left(-\frac{1}{4k}\right)$. Dalla figura vediamo chiaramente che per $0 < \alpha < \pi$ (la zona che ci interessa infatti per α=0 la corda AB degenera in un punto e per α=π diventa il diametro del cerchio) *tgx* è crescente se *x<α* e decresce se *x>α*. Quindi α è un massimo relativo.
M allora l'area è massima se:

$$x = arctg\left(-\frac{1}{4k}\right)$$

Troviamo adesso il valore di *k* tale che $\widehat{AOB} = 150°$.
Possiamo scrivere:

$$tgx = -\frac{1}{4k} \quad \rightarrow \quad tg(150°) = -\frac{1}{4k} \quad \rightarrow \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{4k} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3}4k = 1$$

$$k = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales