Esercizio 3

Si studi la funzione:

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

e se ne disegni il grafico.

Si scrivano l'equazione della parabola avente come asse l'asse delle ordinate, vertice nel punto $(0, 1)$ e tangente alla curva e quella della parabola a questa simmetrica rispetto alla congiungente i punti di contatto. Si calcolino le aree delle tre regioni finite di piano limitate dalle due parabole e dalla curva data.

Svolgimento:

Troviamo il campo di esistenza.
Deve essere:

$$x^2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq 0$$

La funzione è sempre positiva e non si annulla mai. Inoltre non ha intersezioni con gli assi cartesiani.
Troviamo gli asintoti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali.

$$\lim_{x\to 0^-} x^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$$

L'asse delle ordinate è asintoto verticale.
Asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} x + \frac{1}{x^3} = +\infty$$

Non esistono asintoti obliqui.
Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 2x - 2\frac{1}{x^3}$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$2x - 2\frac{1}{x^3} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^4 - 1}{x^3} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{x^3} \geq 0$$

Facciamo il grafico:

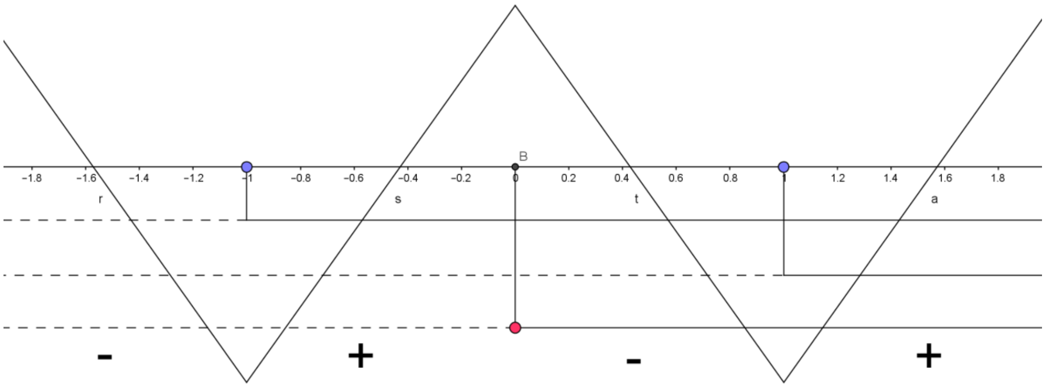

Figura 1

La funzione data è decrescente per $x < -1$ e $0 < x \leq 1$ ed è crescente per $-1 < x < 0$ e $x > 1$
Presenta due punti di minimo assoluto:

$$(-1, 2) \;\; e \;\;\; (1, 2)$$

Studiamo adesso la derivata seconda:

$$f''(x) = 2 + \frac{3}{x^4}$$

La derivata seconda è sempre positiva e non si annulla mai quindi la funzione è sempre convessa. Possiamo disegnare il grafico.

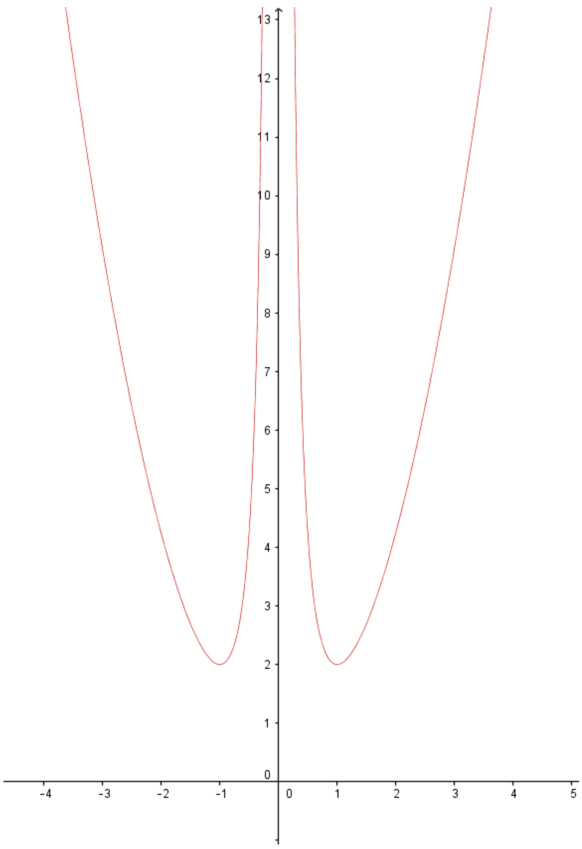

Figura 2

Troviamo ora le equazioni delle parabole. Cominciamo con la prima. Scriviamo l'equazione di una parabola generica:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Deve avere come asse l'asse delle ordinate e il vertice in (0, 1). Quindi deve essere:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = 0 \quad \rightarrow \quad b = 0$$

Quindi:

$$y = ax^2 + c$$

Imponiamo adesso il passaggio per il vertice:

$$1 = c$$

Quindi la parabola è:

$$y = ax^2 + 1$$

Non ci resta che determinare a imponendo la condizione di tangenza:

$$\begin{cases} y = x^2 + \frac{1}{x^2} \\ y = ax^2 + 1 \end{cases} \rightarrow \quad ax^2 + 1 = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad \rightarrow \ ax^4 + x^2 - x^4 - 1 = 0 \quad (a-1)x^4 + x^2 - 1 = 0$$

Il sistema ha 4 soluzioni che, per la condizione di tangenza, devono essere due a due coincidenti. Poniamo $t = x^2$ e sostituiamo:

$$(a-1)t^2 + t - 1 = 0 \quad (1)$$

Deve essere:

$$\Delta = 1 + 4(a-1) = 0 \ \rightarrow \ 4a - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{3}{4}$$

Facciamo la verifica. Sostituendo nella (1) si trova:

$$\left(\frac{3}{4} - 1\right)t^2 + t - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{4}t^2 + t - 1 + 0 \quad \rightarrow \quad t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$(t-2)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t_{1-2} = 2$$

Troviamo le quattro soluzioni del sistema (le soluzioni sono a due a due coincidenti):

$$x^2 = 2 \quad \rightarrow \quad x_{1-2} = \pm\sqrt{2}$$

$$x_1 = \sqrt{2} \quad y_1 = \frac{5}{2} \qquad x_2 = \sqrt{2} \quad y_2 = \frac{5}{2} \qquad x_3 = -\sqrt{2} \quad y_3 = \frac{5}{2} \qquad x_4 = -\sqrt{2} \quad y_4 = \frac{5}{2}$$

L'equazione della parabola vale:

$$y = \frac{3}{4}x^2 + 1$$

La retta che congiunge i due punti di tangenza ha equazione:

$$y = \frac{5}{2}$$

La parabola simmetrica rispetto alla congiungente i punti di contatto ha equazione:

$$y = -\frac{3}{4}x^2 + 4$$

Disegniamo il grafico:

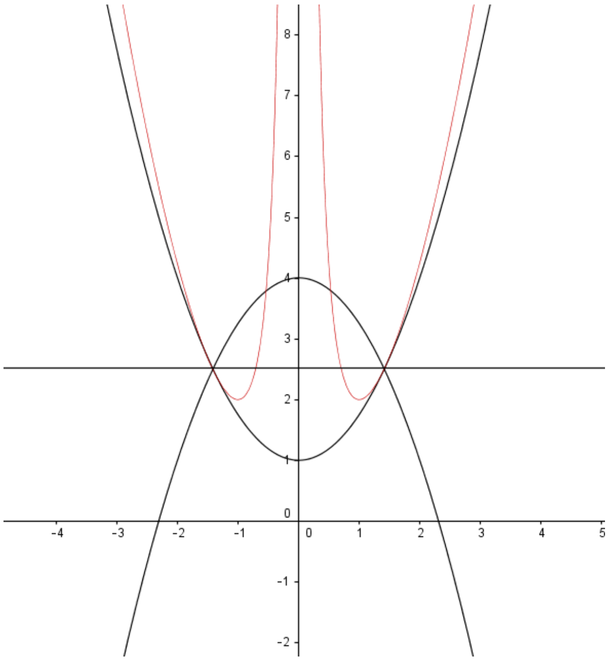

Figura 3

Coloriamo le tre regioni di piano di cui dobbiamo calcolare l'area.

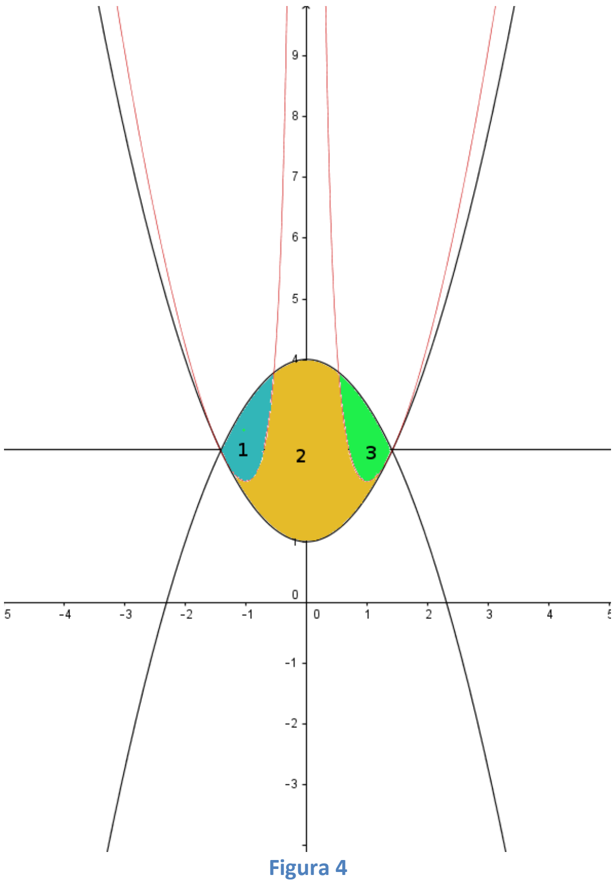

Figura 4

Per trovare le aree richieste dobbiamo conoscere i punti di intersezione della funzione studiata con la parabola concava. Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 + \dfrac{1}{x^2} \\ y = -\dfrac{3}{4}x^2 + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{3}{4}x^2 + 4 \\ y = x^2 + \dfrac{1}{x^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{4}x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 4 = 0 \\ y = x^2 + \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

Posto $x \neq 0$ possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \dfrac{7}{4}x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \\ y = x^2 + \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione biquadratica. Poniamo $t = x^2$ e sostituiamo:

$$7t^2 - 16t + 4 = 0$$

$$t_{1-2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{7} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{7} = \frac{8 \pm 6}{7}$$

$$t_1 = 2, \;\; t_2 = \frac{2}{7}$$

Tutte e due le soluzioni sono accettabili, troviamo i quattro valori di *x*:

$$x_1 = -\sqrt{2} \quad x_2 = \sqrt{2} \qquad x_3 = -\sqrt{\frac{2}{7}} = -\frac{\sqrt{14}}{7} \qquad x_4 = \sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

Sostituendo nella seconda equazione del sistema troviamo i valori corrispondenti di *y*:

$$y_1 = \frac{5}{2} \quad y_2 = \frac{5}{2} \qquad y_3 = \frac{2}{7} + \frac{7}{2} = \frac{4+49}{14} = \frac{53}{14} \qquad y_4 = \frac{53}{14}$$

Punti di intersezione:

$$P_1 = \left(-\sqrt{2}, \frac{5}{2}\right) \;\; P_2 = \left(\sqrt{2}, \frac{5}{2}\right) \;\; P_3 = \left(-\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{53}{14}\right) \;\; P_4 = \left(\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{53}{14}\right)$$

Inseriamo i punti trovati nel grafico:

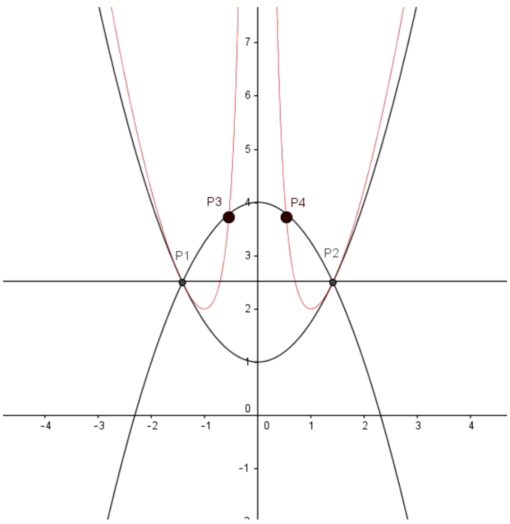

Figura 5

Troviamo le aree come richiesto (vedi figura 4).
Area 1. L'area è delimitata dalla funzione studiata e dalla parabola concava. La curva che sta sopra è la parabola e gli estremi di integrazione sono dati dalle ascisse dei punti P_1 e P_3:

$$Area_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{-\frac{\sqrt{14}}{7}} \left[-\frac{3}{4}x^2 + 4 - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\right] dx = \int_{-\sqrt{2}}^{-\frac{\sqrt{14}}{7}} \left[-\frac{3}{4}x^2 + 4 - x^2 - \frac{1}{x^2}\right] dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{-\frac{\sqrt{14}}{7}} \left[-\frac{7}{4}x^2 + 4 - \frac{1}{x^2}\right] dx = -\frac{7}{4}\frac{x^3}{3} + 4x + \frac{1}{x}\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{-\frac{\sqrt{14}}{7}} =$$

$$= \frac{7}{12}\frac{14\sqrt{14}}{343} - \frac{4\sqrt{14}}{7} - \frac{7\sqrt{14}}{14} - \left(\frac{14\sqrt{2}}{12} - 4\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{14}}{42} - \frac{4\sqrt{14}}{7} - \frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{7\sqrt{2} - 24\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{14} - 24\sqrt{14} - 21\sqrt{14}}{42} + \frac{20\sqrt{2}}{6} =$$

$$= -\frac{44\sqrt{14}}{42} + \frac{10\sqrt{2}}{3} = \frac{-44\sqrt{14} + 140\sqrt{2}}{42} = \frac{70\sqrt{2} - 22\sqrt{14}}{21}$$

Area 3. L'area è delimitata dalla funzione studiata e dalla parabola concava. La curva che sta sopra è la parabola e gli estremi di integrazione sono dati dalle ascisse dei punti P_4 e P_2:

$$Area_3 = \int_{\frac{\sqrt{14}}{7}}^{\sqrt{2}} \left[-\frac{3}{4}x^2 + 4 - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\right] dx = \int_{\frac{\sqrt{14}}{7}}^{\sqrt{2}} \left[-\frac{3}{4}x^2 + 4 - x^2 - \frac{1}{x^2}\right] dx =$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{14}}{7}}^{\sqrt{2}} \left[-\frac{7}{4}x^2 + 4 - \frac{1}{x^2}\right] dx = -\frac{7}{4}\frac{x^3}{3} + 4x + \frac{1}{x}\Bigg|_{\frac{\sqrt{14}}{7}}^{\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{7 \cdot 2\sqrt{2}}{12} + 4\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{7}{12}\frac{14\sqrt{14}}{343} + \frac{4\sqrt{14}}{7} + \frac{7\sqrt{14}}{14}\right) =$$

$$= \frac{-7\sqrt{2} + 24\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{14}}{42} - \frac{4\sqrt{14}}{7} - \frac{\sqrt{14}}{2} =$$

$$= \frac{20\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{14} - 24\sqrt{14} - 21\sqrt{14}}{42} = \frac{10\sqrt{2}}{3} - \frac{44\sqrt{14}}{42} = \frac{10\sqrt{2}}{3} - \frac{22\sqrt{14}}{21} = \frac{70\sqrt{2} - 22\sqrt{14}}{21}$$

Si ottiene lo stesso risultato come ci aspettavamo.

Area 2. L'area è delimitata dalla funzione studiata e dalle due parabole. Per calcolarla osserviamo che è data dalla differenza dell'area delimitata dalle due parabole e dalle aree 1 e 3 appena determinate (vedi figura 4). Cominciamo con l'area delimitata dalle due parabole. La curva che sta sopra è la parabola concava e gli estremi di integrazione sono le ascisse dei punti P_1 e P_2 quindi:

$$Area_{parabole} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[-\frac{3}{4}x^2 + 4 - \left(\frac{3}{4}x^2 + 1\right)\right] dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[-\frac{3}{4}x^2 + 4 - \frac{3}{4}x^2 - 1\right] dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[-\frac{3}{2}x^2 + 3\right] dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} + 3x \Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2} - \left(\frac{2\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$Area_2 = Area_{parabole} - Area_1 - Area_3 = Area_{parabole} - 2Area_1 =$$

$$= 4\sqrt{2} - 2\,\frac{70\sqrt{2} - 22\sqrt{14}}{21} = \frac{84\sqrt{2} - 140\sqrt{2} + 44\sqrt{14}}{21} = \frac{44\sqrt{14} - 56\sqrt{2}}{21}$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales