L'equazione di una parabola

La parabola è il luogo dei punti equidistanti da un punto detto ***fuoco*** ed una retta detta ***direttrice***.
Partendo dalla definizione determiniamo l'equazione di una parabola generica.
Il fuoco è il punto di coordinate (x_F, y_F) e la direttrice è la retta di equazione y=d.

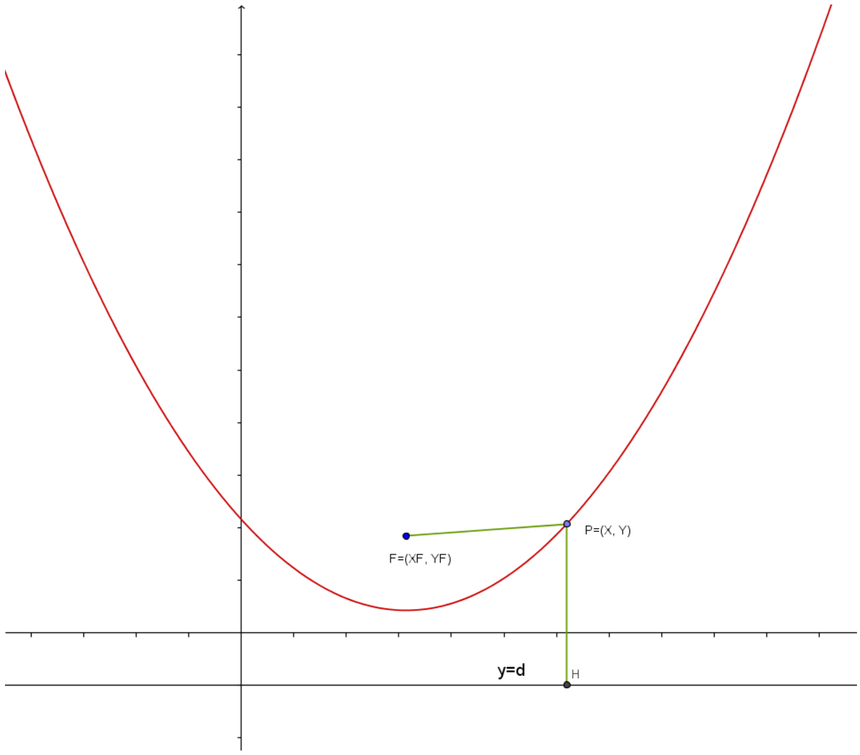

Figura 1 Una parabola.

In figura 1 è rappresentata una parabola. In verde sono evidenziati i due segmenti che costituiscono le distanze del generico punto P dal fuoco e dalla direttrice. La lunghezza del segmento PF è data da:

$$PF = \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2}$$

Poiché le coordinate del punto H (intersezione della retta perpendicolare alla direttrice condotta dal punto P con la direttrice stessa) sono H=(x, d), la lunghezza del segmento PH vale:

$$PH = \sqrt{(x - x)^2 + (y - d)^2} = \sqrt{(y - d)^2} = y - d$$

Uguagliando la lunghezza di questi due segmenti si ottiene:

$$\sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} = y - d$$

Elevando ambo i membri al quadrato:

$$(x - x_F)^2 + (y - y)^2 = (y - d)^2$$

$$x^2 - 2x_F x + x_F^2 + y^2 - 2y_F y + y_F^2 = y^2 - 2yd + d^2$$

$$x^2 - 2x_F x + x_F^2 - 2y_F y + y_F^2 = -2yd + d^2$$

Portiamo i termini in y al primo membro e gli altri al secondo:

$$2(y_F - d)y = x^2 - 2x_F x + x_F^2 + y_F^2 - d^2$$

$$y = \frac{1}{2(y_F - d)}x^2 - \frac{x_F}{y_F - d}x + \frac{x_F^2 + y_F^2 - d^2}{2(y_F - d)}$$

Abbiamo trovato l'equazione di una parabola. I coefficienti sono:

$$a = \frac{1}{2(y_F - d)}; \quad b = -\frac{x_F}{y_F - d}; \quad c = \frac{x_F^2 + y_F^2 - d^2}{2(y_F - d)}$$

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2(y_F - d)} \\ b = -\dfrac{x_F}{y_F - d} \\ c = \dfrac{x_F^2 + y_F^2 - d^2}{2(y_F - d)} \end{cases}$$

Possiamo trovare le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice in funzione dei coefficienti della parabola.

$$\begin{cases} a(y_F - d) = \dfrac{1}{2} \\ b(y_F - d) = -x_F \\ c(y_F - d) = \dfrac{x_F^2 + y_F^2 - d^2}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_F - d = \dfrac{1}{2a} \\ \dfrac{b}{2a} = -x_F \\ \dfrac{c}{2a} = \dfrac{x_F^2 + y_F^2 - d^2}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_F - d = \dfrac{1}{2a} \\ x_F = -\dfrac{b}{2a} \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2}{4a^2} + y_F^2 - d^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_F = \dfrac{1}{2a} + d \\ x_F = -\dfrac{b}{2a} \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2}{4a^2} + \left(\dfrac{1}{2a} + d\right)^2 - d^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_F = \dfrac{1}{2a} + d \\ x_F = -\dfrac{b}{2a} \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{d}{a} + d^2 - d^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_F = \dfrac{1}{2a} + d \\ x_F = -\dfrac{b}{2a} \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{d}{a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_F = \dfrac{1}{2a} + d \\ x_F = -\dfrac{b}{2a} \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{b^2 + 1 + 4ad}{4a^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_F = \dfrac{1}{2a} + d \\ x_F = -\dfrac{b}{2a} \\ c = \dfrac{b^2 + 1 + 4ad}{4a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_F = \dfrac{1}{2a} + d \\ x_F = -\dfrac{b}{2a} \\ 4ac = b^2 + 1 + 4ad \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_F = \dfrac{1}{2a} + d \\ x_F = -\dfrac{b}{2a} \\ d = \dfrac{4ac - b^2 - 1}{4a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_F = \frac{1}{2a} + \frac{4ac - b^2 - 1}{4a} \\ x_F = -\frac{b}{2a} \\ d = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_F = \frac{2 + 4ac - b^2 - 1}{4a} \\ x_F = -\frac{b}{2a} \\ d = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_F = \frac{4ac - b^2 + 1}{4a} \\ x_F = -\frac{b}{2a} \\ d = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a} \end{cases}$$

Abbiamo trovato le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice in funzione dei coefficienti dell'equazione della parabola:

$$\begin{cases} x_F = -\frac{b}{2a} \\ y_F = \frac{4ac - b^2 + 1}{4a} \\ d = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a} \end{cases}$$

Ricordando che il discriminante del trinomio di secondo grado che rappresenta l'equazione della parabola è dato da:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si trova:

$$\begin{cases} x_F = -\frac{b}{2a} \\ y_F = \frac{1 - \Delta}{4a} \\ d = -\frac{1 + \Delta}{4a} \end{cases}$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales