Mutue posizioni della parabola con gli assi cartesiani

L'equazione di una parabola generica è data da:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Consideriamo l'equazione che definisce i punti di intersezione della parabola con l'asse delle ascisse (y=0):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

si verificano 3 casi:

1. Il discriminante è maggiore di zero:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

L'equazione considerata ha due soluzioni distinte quindi la parabola interseca l'asse delle ascisse in due punti.

Esempio 1:

Consideriamo la parabola:

$$y = 2x^2 - 5x + 2$$

Troviamo l'intersezione con l'asse x risolvendo l'equazione:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x_{1-2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 * 2 * 2}}{2 * 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = \frac{5 + 3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \qquad x_2 = \frac{5 - 3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

La parabola passa per i punti:

$$A \equiv (2, 0) \;\; e \;\; B \equiv \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

Troviamo il vertice. L'ascissa del vertice è data da:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2 * 2} = \frac{5}{4}$$

Posso trovare l'ordinata del vertice in due modi:

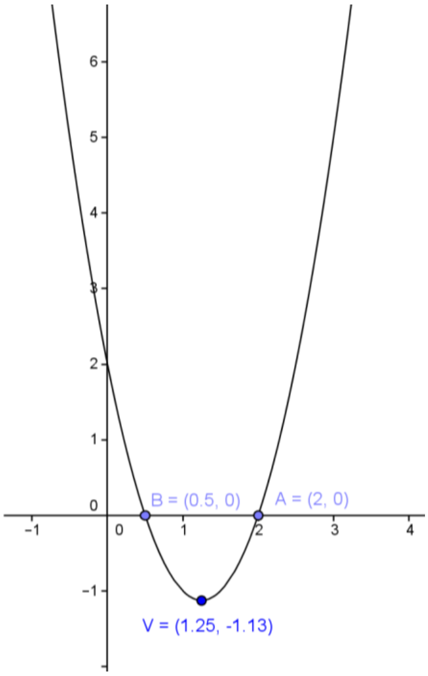
$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9}{8}$$

Posso anche sostituire il valore di x_V nell'equazione:

$$y = 2x^2 - 5x + 2 = 2\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5\frac{5}{4} + 2 = 2\frac{25}{16} - \frac{25}{4} + 2 = \frac{25}{8} - \frac{25}{4} + 2 =$$

$$= \frac{25 - 50 + 16}{8} = -\frac{9}{8}$$

Abbiamo tre punti quindi possiamo disegnare la parabola:



2. Il discriminante è uguale a zero.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0$$

L'equazione considerata ha come soluzione due punti coincidenti quindi la parabola interseca l'asse delle ascisse in un punto (si dovrebbe dire in due punti coincidenti).

Esempio 2:

Consideriamo la parabola:

$$y = x^2 - 6x + 9$$

Troviamo l'intersezione con l'asse x risolvendo l'equazione:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x_{1-2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 * 1 * 9}}{2 * 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_1 = x_2 = 3$$

La parabola passa per il punto:

$$A \equiv (3, 0)$$

Troviamo il vertice. L'ascissa del vertice è data da:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 * 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Posso trovare l'ordinata del vertice in due modi:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{0}{4} = 0$$

Posso anche sostituire il valore di x_V nell'equazione:

$$y = x^2 - 6x + 9 = 3^2 - 6 * 3 + 9 = 9 - 18 + 9 = 0$$

Il vertice coincide con l'intersezione con l'asse x. (D'altra parte era prevedibile...).

Troviamo altri due punti della parabola. Poniamo x=0:

$$y = 0^2 - 6 * 0 + 9 = 9$$

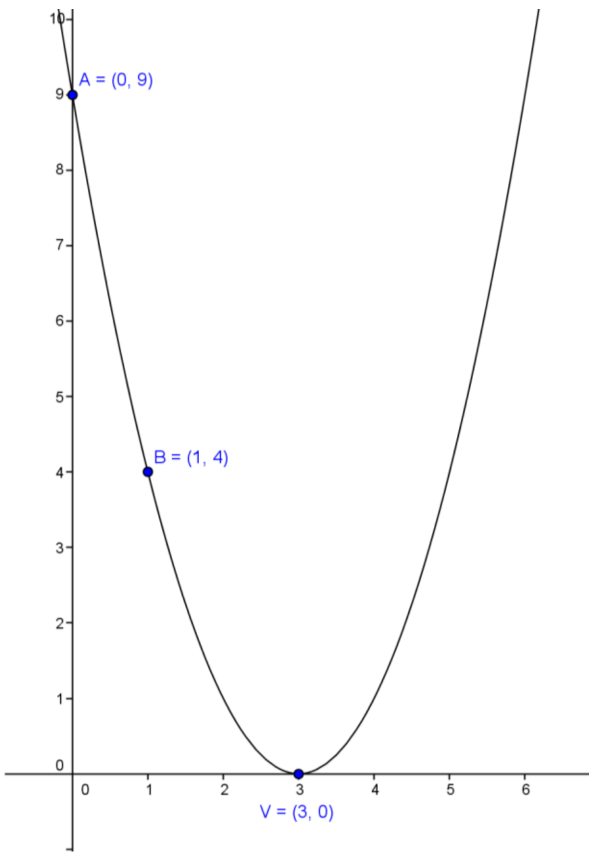
Poniamo x=1:

$$y = 1^2 - 6 * 1 + 9 = 4$$

La parabola passa per i punti:

$$A \equiv (0,9) \quad e \quad B \equiv (1,4)$$

Disegnamo la parabola.



3. Il discriminante è minore di zero:

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

La parabola non interseca l'asse delle ascisse.

Esempio 3:

Consideriamo la parabola:

$$y = x^2 + x + 2$$

Troviamo l'intersezione con l'asse x risolvendo l'equazione:

$$x^2 + x + 2 = 0$$

$$x_{1-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4*1*2}}{2*1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

L'equazione non ha soluzioni reali.

Troviamo il vertice. L'ascissa del vertice è data da:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2*1} = -\frac{1}{2}$$

Posso trovare l'ordinata del vertice in due modi:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-7}{4} = \frac{7}{4}$$

Posso anche sostituire il valore di x_V nell'equazione:

$$y = x^2 + x + 2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{1-2+8}{4} = \frac{7}{4}$$

Troviamo altri due punti della parabola. Poniamo x=0:

$$y = 0^2 + 1*0 + 2 = 2$$

Poniamo x=1:

$$y = 1^2 + 1*1 + 2 = 4$$

La parabola passa per i punti:

$$A \equiv (0,2) \quad e \quad B \equiv (1,4)$$

Disegnamo la parabola.