Esercizio 1:

a. Determinare a,b,c, in modo che la parabola $y = ax^2 + bx + c$ passi per i punti A$\equiv (-1, 10)$, $B \equiv (2,1)$, $C \equiv \left(-\frac{1}{2}, 6\right)$.
b. Trovare le coordinate del vertice e del fuoco, l'equazione dell'asse, della direttrice e le intersezioni con gli assi coordinati.
c. Determinare gli intervalli in cui la parabola ha segno positivo o negativo.
d. Disegnare il grafico.

Svolgimento:

a) La parabola deve passare per i punti dati quindi devo determinare i valori a, b e c che soddisfano il seguente sistema:

$$\begin{cases} 10 = a - b + c \; passaggio \; per \; A \; sostituisco \;\; x = -1, y = 10 \\ 1 = 4a + 2b + c \; passaggio \; per \; B \; sostituisco \; x = 2, y = 1 \\ 6 = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + c \; passaggio \; per \; C \; sostituisco \; x = -\frac{1}{2}, y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b + c = 10 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + c = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 10 + b - c \\ 4(10 + b - c) + 2b + c = 1 \\ a - 2b + 4c = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 10 + b - c \\ 40 + 4b - 4c + 2b + c = 1 \\ 10 + b - c - 2b + 4c = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 10 + b - c \\ 6b - 3c = -39 \\ -b + 3c = 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 10 + b - c \\ 2b - c = -13 \\ -b + 3c = 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 10 + b - c \\ c = 2b + 13 \\ -b + 3(2b + 13) = 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 10 + b - c \\ c = 2b + 13 \\ -b + 6b + 39 = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 10 + b - c \\ c = 2b + 13 \\ 5b = -25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 10 + b - c \\ c = 2b + 13 \\ b = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 10 + b - c \\ b = -5 \\ c = -10 + 13 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 10 - 5 - 3 = 2 \\ b = -5 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 3 \end{cases}$$

La parabola cercata è:

$$y = 2x^2 - 5x + 3$$

b) L'ascissa del vertice è data da $-\frac{b}{2a} = \frac{5}{4}$. L'ordinata del vertice è $\frac{-(b^2-4ac)}{4a} = \frac{-(25-4*2*3)}{4*2} = -\frac{25-24}{8} = -\frac{1}{8}$. Se non ricordo la formula posso trovare l'ordinata sostituendo questo valore nell'equazione della parabola:

$$y = 2\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5\frac{5}{4} + 3 = 2\left(\frac{25}{16}\right) - \frac{25}{4} + 3 = \frac{25}{8} - \frac{25}{4} + 3 = \frac{25 - 50 + 24}{8} = -\frac{1}{8}.$$

$$V \equiv \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{8}\right)$$

Le coordinate del fuoco sono: ascissa $-\frac{b}{2a}=\frac{5}{4}$ ordinata: $\frac{1-(b^2-4ac)}{4a}=\frac{1-1}{4*2}=0$.

$$F\equiv\left(\frac{5}{4},0\right)$$

La parabola ha asse di simmetria verticale quindi l'equazione dell'asse è:

$$x=-\frac{b}{2a}=\frac{5}{4}$$

L'equazione della direttrice è:

$$y=-\frac{1+b^2-4ac}{4a}=-\frac{1+1}{8}=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$$

Per trovare le intersezioni con l'asse x risolvo il sistema:

$$\begin{cases} y=2x^2-5x+3 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow 2x^2-5x+3=0$$

È un'equazione di secondo grado. Cerco le soluzioni:

$$x_{1-2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{25-4*2*3}}{2*2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{4}=\frac{5\pm1}{4}$$

Soluzioni: $x_1=\frac{3}{2},\ x_2=1$. La parabola interseca l'asse delle ascisse in $P\equiv\left(\frac{3}{2},0\right)$ e $P\equiv(1,0)$

Per trovare l'intersezione con l'asse y risolvo il sistema;

$$\begin{cases} y=2x^2-5x+3 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow y=3$$

Intersezione con l'asse y in $P\equiv(0,3)$.

c) Per trovare il segno della parabola risolvo la disequazione:

$$2x^2-5x+3>0$$

Le soluzioni dell'equazione associata sono $x_1=\frac{3}{2},\ x_2=1$ quindi posso scrivere:

$2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)>0$

$x-\frac{3}{2}>0\rightarrow x>\frac{3}{2}$

$x-1>0\rightarrow x>1$

	1		$\frac{3}{2}$	
$+$		$-$		$+$

La funzione è positiva per $x < 1; \quad x > \frac{3}{2}$

d) Grafico