

Esercizio 2:

- Determinare a, b, c , in modo che la parabola $y = ax^2 + bx + c$ passi per il punto $A \equiv (-1, -5)$ e abbia vertice in $V \equiv (1, -1)$.
- Trovare le coordinate del fuoco, l'equazione dell'asse, della direttrice e le intersezioni con gli assi coordinati.
- Determinare gli intervalli in cui la parabola ha segno positivo o negativo.
- Disegnare il grafico.

Svolgimento:

a) La parabola deve passare per il punto A ed avere il vertice in V quindi devo determinare i valori a, b e c che soddisfano il seguente sistema:

$$\begin{cases} -5 = a - b + c & \text{passaggio per A sostituisco } x = -1, y = -5 \\ 1 = \frac{-b}{2a} & \text{il vertice ha ascissa 1} \\ -1 = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} & \text{il vertice ha ordinata -1} \end{cases}$$
$$\begin{cases} b = -2a \\ a + 2a + c = -5 \\ -4a = -4a^2 + ac \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ 3a + c = -5 \\ -4a + c = -4 \end{cases}$$

Nella terza equazione ho diviso ambo i membri per a . Posso farlo perché è sicuramente $a \neq 0$ altrimenti l'equazione data non rappresenterebbe una parabola.

$$\begin{cases} b = -2a \\ c = -5 - 3a \\ c = 4a - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ 4 - 4a = -5 - 3a \\ c = 4a - 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a = 1 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$$

La parabola cercata è:

$$y = x^2 - 2x$$

b) Le coordinate del fuoco sono: ascissa $-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$ ordinata: $\frac{1-(b^2-4ac)}{4a} = \frac{1-4}{4} = -\frac{3}{4}$.

$$F \equiv \left(1, -\frac{3}{4}\right)$$

La parabola ha asse di simmetria verticale quindi l'equazione dell'asse è:

$$x = -\frac{b}{2a} = 1$$

L'equazione della direttrice è:

$$y = -\frac{1+b^2-4ac}{4a} = -\frac{1+4}{4} = -\frac{5}{4}$$

Per trovare le intersezioni con l'asse x risolvo il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Intersezione con l'asse x nei punti $P \equiv (0, 0)$ $Q \equiv (2, 0)$

Per trovare l'intersezione con l'asse y risolvo il sistema;

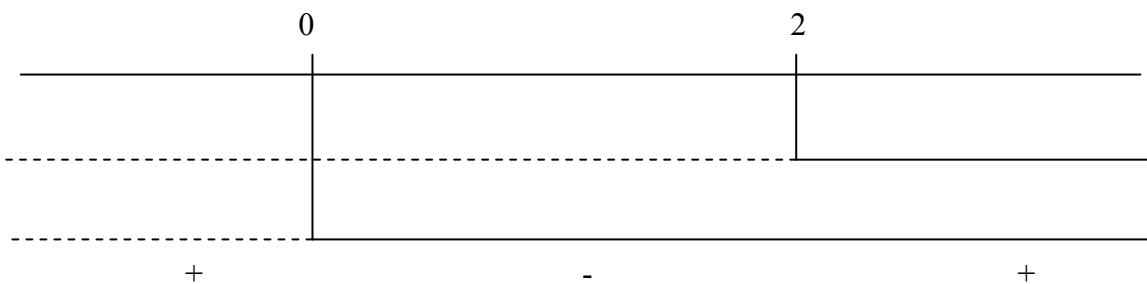
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0$$

Intersezione con l'asse y nel punto $P \equiv (0, 0)$.

c) Per studiare il segno della parabola risolvo la disequazione:

$$x^2 - 2x \geq 0$$

$$x(x - 2) \geq 0 \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$



Dal grafico si vede che la parabola assume valori positivi per $x < 0$ e $x > 2$.

d) Grafico

