

Esercizio 3:

- Determinare l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ in modo che abbia direttrice la retta $y = -1$ e vertice nel punto $V \equiv (2, 3)$
- Trovare le coordinate del fuoco e l'equazione dell'asse.
- Determinare gli intervalli in cui la parabola ha segno positivo o negativo.
- Disegnare il grafico.

Svolgimento:

a) Impongo le condizioni date:

$$\begin{cases} -1 = -\frac{1 + b^2 - 4ac}{4a} & \text{direttrice } y = -1 \\ 2 = -\frac{b}{2a} & \text{ascissa del vertice} \\ 3 = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} & \text{ordinata del vertice} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a = 1 + b^2 - 4ac \\ 4a = -b \\ 12a = 4ac - b^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a = 1 + 16a^2 - 4ac \\ 12a = 4ac - 16a^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 16a^2 + 12a - 4ac = 0 \\ 16a^2 - 4ac - 4a + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4a \\ 4a(4a + 3 - c) = 0 \\ 16a^2 - 4ac - 4a + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ c = 4a + 3 \text{ la soluzione } a = 0 \text{ non è accettabile} \\ 16a^2 - 4a(4a + 3) - 4a + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4a \\ c = 4a + 3 \\ 16a^2 - 16a^2 - 12a - 4a + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ c = 4a + 3 \\ -16a = -1 \rightarrow a = \frac{1}{16} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -4\frac{1}{16} \\ c = 4\frac{1}{16} + 3 \\ a = \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -\frac{1}{4} \\ a = \frac{1}{16} \\ c = \frac{1}{4} + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{16} \\ b = -\frac{1}{4} \\ c = \frac{13}{4} \end{cases}$$

Equazione della parabola:

$$y = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$$

b) Le coordinate del fuoco sono: ascissa $-\frac{b}{2a} = 2$ ordinata:

$$\frac{1 - (b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{1 - \left(\frac{1}{16} - 4 \frac{1}{16} \frac{13}{4}\right)}{4 \frac{1}{16}} = \frac{1 - \frac{1 - 13}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1 - \frac{-12}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{1 + \frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{7}{4} \cdot 4 = 7$$

$$F \equiv (2, 7)$$

La parabola ha asse di simmetria verticale quindi l'equazione dell'asse è:

$$x = -\frac{b}{2a} = 2$$

c) Per studiare il segno della parabola risolvo la disequazione:

$$\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \geq 0 \rightarrow x^2 - 4x + 52 \geq 0$$

$$x_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 * 4 * 52}}{2 * 4} = \textit{non ha soluzioni reali}$$

La parabola è sempre positiva.

d) Grafico

