Esercizio 4:

Data la parabola di equazione:

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1$$

si scrivano le equazioni delle tangenti passanti per il punto $P \equiv \left(\frac{3}{2}, -2\right)$ e verificare se sono perpendicolari tra loro.

Svolgimento:

Scrivo l'equazione di un fascio di rette generico:

$$y - y_p = m(x - x_p)$$

Impongo la condizione di passaggio per il punto P:

$$y + 2 = m\left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \rightarrow \quad y = mx - \frac{3}{2}m - 2$$

La retta deve avere punti in comune con la parabola. Per trovarli scrivo il sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - 1 \\ y = mx - \frac{3}{2}m - 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4}x^2 - 1 = mx - \frac{3}{2}m - 2$$

$$\frac{1}{4}x^2 - mx + \frac{3}{2}m + 1 = 0$$

La retta tangente ha come punti di intersezione con la parabola due punti coincidenti quindi devo determinare m in modo da avere il discriminante dell'equazione di secondo grado uguale a zero.

$$\Delta = m^2 - 4\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}m + 1\right) = m^2 - \frac{3}{2}m - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 2m^2 - 3m - 2 = 0$$

$$m_{1-2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 * 2 * (-2)}}{2 * 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

Adesso posso scrivere le equazioni delle due rette tangenti:

Prima retta $m_1 = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$:

$$y = mx - \frac{3}{2}m - 2 \quad \rightarrow \quad y = 2x - 3 - 2 \quad \rightarrow \quad y = 2x - 5$$

Seconda retta $m_2 = \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$:

$$y = mx - \frac{3}{2}m - 2 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - 2 = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$$

Le due rette sono perpendicolari perché i due coefficienti angolari sono l'uno l'inverso del reciproco dell'altro. Infatti i coefficienti angolari sono:

$$m_1 = 2; \; m_2 = -\frac{1}{2}$$

Grafico: