Esercizio 5:
Data la parabola di equazione:

$$y = -x^2 + 3x - 2$$

Trovare il vertice, il fuoco e le equazioni dell'asse e della direttrice.
Determinare i punti di intersezione con gli assi cartesiani.
Dato il fascio proprio di rette di equazione:

$$y = mx + 2$$

Scrivere l'equazione della retta tangente alla parabola.
Disegnare il grafico.

Svolgimento:

Trovo le coordinate del vertice:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2(-1)} = \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{3^2 - 4(-1)(-2)}{4(-1)} = -\frac{9-8}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$V \equiv \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

Trovo le coordinate del fuoco:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2(-1)} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{1-\Delta}{4a} = -\frac{1 - b^2 + 4ac}{4a} = \frac{1 - 3^2 + 4(-1)(-2)}{4(-1)} = \frac{1-9+8}{-4} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$F \equiv \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

Equazione dell'asse:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2(-1)} = \frac{3}{2}$$

Equazione della direttrice:

$$y = -\frac{1+\Delta}{4a} = -\frac{1 + b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{1 + 3^2 - 4(-1)(-2)}{4(-1)} = -\frac{1+9-8}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Per trovare l'intersezione con l'asse x devo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3x - 2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$x_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 * 2 * 1}}{2 * 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

La parabola interseca l'asse x in due punti:

$$P_1 \equiv (2,0) \quad P_2 = (1,0)$$

Per trovare l'intersezione con l'asse y risolvo il sistema:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3x - 2 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

La parabola interseca l'asse y in un punto:

$$P \equiv (0,-2)$$

Per determinare la retta appartenente al fascio dato tangente alla parabola si imposta il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3x - 2 \\ y = mx + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} mx + 2 = -x^2 + 3x - 2 \\ y = mx + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x^2 + 3x - 2 - mx - 2 = 0 \\ y = mx + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2 + 3x - mx - 4 = 0 \\ y = mx + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x^2 + (3-m)x - 4 = 0 \\ y = mx + 2 \end{cases}$$

La retta tangente e la parabola hanno in comune due punti coincidenti quindi devo trovare m (il coefficiente angolare della retta) tale che il discriminante dell'equazione di secondo grado del sistema sia nullo.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3-m)^2 - 4(-1)(-4) = 9 - 6m + m^2 - 16 = 0$$

$$m^2 - 6m - 7 = 0$$

$$m_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-7)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2}$$

$$m_1 = \frac{6+8}{2} = 7 \quad m_2 = \frac{6-8}{2} = -1$$

Ci sono due rette appartenenti al fascio dato e tangenti alla parabola:

$$y = 7x + 2 \quad e \quad y = -x + 2$$

Punti di tangenza con la retta y=7x+2:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3x - 2 \\ y = 7x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 7x + 2 = -x^2 + 3x - 2 \\ y = 7x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 = 0 \\ y = 7x + 2 \end{cases}$$

Il primo membro dell'equazione di secondo grado del sistema rappresenta il quadrato di un binomio.

$$\begin{cases} (x+2)^2 = 0 \\ y = 7x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{1-2} = -2 \\ y = 7(-2) + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{1-2} = -2 \\ y_{1-2} = -12 \end{cases}$$

Punti di tangenza con la retta y=-x+2:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3x - 2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 2 = -x^2 + 3x - 2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

Il primo membro dell'equazione di secondo grado del sistema rappresenta il quadrato di un binomio.

$$\begin{cases}(x-2)^2=0\\ y=-x+2\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x_{1-2}=2\\ y=-2+2\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x_{1-2}=2\\ y_{1-2}=0\end{cases}$$

Grafico: