

Esercizio 6:

Siano dati l'equazione della parabola $y = x^2 + 4x + 2$ e il punto $P \equiv (3,7)$.

Determinare l'equazione delle rette r ed s tangenti alla parabola e passanti per il punto P .

Determinare le coordinate dei punti di contatto.

Detti A e B i punti di contatto delle tangenti con la parabola, determinare l'equazione della retta t passante per tali punti.

Svolgimento:

Scrivo l'equazione di un generico fascio proprio di rette:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Individuo il fascio proprio di centro P :

$$y - 7 = m(x - 3) \rightarrow y - 7 = mx - 3m \rightarrow y = mx - 3m + 7$$

Per individuare le rette del fascio che hanno punti in comune con la parabola imposto il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x + 2 \\ y = mx - 3m + 7 \end{cases} \rightarrow mx - 3m + 7 = x^2 + 4x + 2$$

$$x^2 + 4x + 2 - mx + 3m - 7 = 0 \rightarrow x^2 + (4 - m)x + 3m - 5 = 0$$

Per trovare le rette tangenti devo determinare m in modo che il discriminante di questa equazione sia nullo: la condizione di tangenza, infatti, impone che ciascuna retta incontri la parabola in due punti coincidenti.

$$\Delta = (4 - m)^2 - 4(3m - 5) = 16 - 8m + m^2 - 12m + 20 = m^2 - 20m + 36 = 0$$

Calcolo i valori di m :

$$m_{1-2} = 10 \pm \sqrt{10^2 - 36} = 10 \pm \sqrt{100 - 36} = 10 \pm \sqrt{64} = 10 \pm 8$$

$$m_1 = 18 \quad m_2 = 2$$

Scrivo le equazioni delle due rette tangenti:

$$y = 18x - 3 \cdot 18 + 7 \rightarrow y = 18x - 54 + 7 \rightarrow y = 18x - 47$$

$$y = 2x - 3 \cdot 2 + 7 \rightarrow y = 2x - 6 + 7 \rightarrow y = 2x + 1$$

$$r: y = 18x - 47$$

$$s: y = 2x + 1$$

Per trovare le coordinate dei punti di contatto devo risolvere due sistemi. Punti di contatto con la retta r :

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x + 2 \\ y = 18x - 47 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 18x - 47 = x^2 + 4x + 2 \\ y = 18x - 47 \end{cases}$$

$$x^2 + 4x + 2 - 18x + 47 = 0 \rightarrow x^2 - 14x + 49 = 0 \rightarrow (x - 7)^2 = 0$$

Come ci aspettavamo troviamo due punti coincidenti $x_{1-2} = 7$

$$y = 18 \cdot 7 - 47 = 79$$

Punti di contatto con la retta r:

$$A \equiv (7,79)$$

Risolvo il secondo sistema per calcolare i punti di contatto con la retta s:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x + 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = x^2 + 4x + 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$x^2 + 4x + 2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x + 1)^2 = 0$$

I due punti sono $x_{1-2} = -1$

$$y = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

Punti di contatto con la retta s:

$$B \equiv (-1, -1)$$

Determino ora la retta passante per i due punti A e B.

Scrivo l'equazione del fascio improprio di rette con centro A:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 79 = m(x - 7)$$

Tra tutte le rette del fascio individuo quella passante per B:

$$-1 - 79 = m(-1 - 7) \rightarrow -80 = -8m \rightarrow m = 10$$

Equazione della retta t:

$$y - 79 = 10(x - 7) \rightarrow y = 10x - 70 + 79$$

$$y = 10x + 9$$

