

**Esercizio 7:**

Data la parabola di equazione:

$$y = x^2 - 3x + 2$$

Determinare le eventuali intersezioni con la retta di equazione  $2x - y - 2 = 0$ .

Determinare le tangenti alla parabola nei punti di intersezione.

Determinare le coordinate del punto di intersezione delle due tangenti.

**Svolgimento:**

Per determinare le intersezioni della parabola con la retta risolvo il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = 2x - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = x^2 - 3x + 2 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 3x + 2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_{1-2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 * 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{5 - 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 2 * 4 - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 8 - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 * 1 - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

**Tangenti alla parabola nel punto  $A \equiv (4, 6)$ :**

Scrivo l'equazione di un generico fascio proprio di rette:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Individuo il fascio proprio di centro A:

$$y - 6 = m(x - 4) \rightarrow y - 6 = mx - 4m \rightarrow y = mx - 4m + 6$$

Per individuare le rette del fascio che hanno punti in comune con la parabola imposto il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = mx - 4m + 6 \end{cases} \rightarrow mx - 4m + 6 = x^2 - 3x + 2$$

$$x^2 - 3x + 2 - mx + 4m - 6 = 0 \rightarrow x^2 - (3 + m)x + 4m - 4 = 0$$

Per trovare le rette tangenti devo determinare m in modo che il discriminante di questa equazione sia nullo: la condizione di tangenza, infatti, impone che ciascuna retta incontri la parabola in due punti coincidenti.

$$\Delta = (3 + m)^2 - 4(4m - 4) = 9 + 6m + m^2 - 16m + 16 = m^2 - 10m + 25 = 0$$

Calcolo i valori di m notando che  $\Delta = (m - 5)^2$  quindi  $m_{1-2} = 5$ .

Retta tangente alla parabola nel punto A:

$$y = 5x - 4 \cdot 5 + 6 \rightarrow y = 5x - 20 + 6 \rightarrow y = 5x - 14$$

**Tangenti alla parabola nel punto B  $\equiv (1, 0)$ :**

Individuo il fascio proprio di centro B:

$$y - 0 = m(x - 1) \rightarrow y = mx - m$$

Per individuare le rette del fascio che hanno punti in comune con la parabola imposto il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = mx - m \end{cases} \rightarrow mx - m = x^2 - 3x + 2$$

$$x^2 - 3x + 2 - mx + m = 0 \rightarrow x^2 - (3 + m)x + m + 2 = 0$$

Per trovare le rette tangenti devo determinare m in modo che il discriminante di questa equazione sia nullo: la condizione di tangenza, infatti, impone che ciascuna retta incontri la parabola in due punti coincidenti.

$$\Delta = (3 + m)^2 - 4(m + 2) = 9 + 6m + m^2 - 4m - 8 = m^2 + 2m + 1 = 0$$

Calcolo i valori di m notando che  $\Delta = (m + 1)^2$  quindi  $m_{1-2} = -1$

Retta tangente alla parabola nel punto B:

$$y = -x + 1$$

Per determinare le coordinate del punto di intersezione delle due tangenti risolvo il sistema:

$$\begin{cases} y = 5x - 14 \\ y = -x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 1 = 5x - 14 \\ y = -x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x - 15 = 0 \\ y = -x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{6} \\ y = -\frac{15}{6} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{15}{6} \\ y = -\frac{9}{6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{6} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

