Esercizio 8:

Siano dati l'equazione della parabola $y = 2x^2 + 5x - 3$ e i due punti $A \equiv \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$ e $B \equiv (-2, -7)$.

- tracciare dal punto A le tangenti r ed s alla parabola ottenendo i punti di contatto P e Q;
- tracciare dal punto B le tangenti t ed u alla parabola ottenendo i punti di contatto R ed S;
- trovare le coordinate del punto di intersezione tra la retta che passa per P e Q e la retta che passa per R ed S;
- trovare l'equazione della retta per i due punti A e B.

Svolgimento:

Tangenti alla parabola nel punto $A \equiv \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$:

Scrivo l'equazione di un generico fascio proprio di rette:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Individuo il fascio proprio di centro A:

$$y - \frac{9}{2} = m\left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \rightarrow \quad y - \frac{9}{2} = mx - \frac{3}{2}m \quad \rightarrow \quad y = mx - \frac{3}{2}m + \frac{9}{2}$$

Per individuare le rette del fascio che hanno punti in comune con la parabola imposto il sistema:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 5x - 3 \\ y = mx - \frac{3}{2}m + \frac{9}{2} \end{cases} \rightarrow \quad 2x^2 + 5x - 3 = mx - \frac{3}{2}m + \frac{9}{2}$$

$$2x^2 + 5x - 3 - mx + \frac{3}{2}m - \frac{9}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 + (5 - m)x + \frac{3}{2}m - \frac{15}{2} = 0$$

$$4x^2 + 2(5 - m)x + 3m - 15 = 0$$

Per trovare le rette tangenti devo determinare m in modo che il discriminante di questa equazione sia nullo: la condizione di tangenza, infatti, impone che ciascuna retta incontri la parabola in due punti coincidenti.

$$\Delta = [2(5 - m)]^2 - 4 * 4(3m - 15) = 4(25 - 10m + m^2) - 16(3m - 15) = 0$$

$$\Delta = 25 - 10m + m^2 - 12m + 60 = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 - 22m + 85 = 0$$

Calcolo i valori di m:

$$m_{1-2} = 11 \pm \sqrt{11^2 - 85} = 11 \pm \sqrt{121 - 85} = 11 \pm \sqrt{36} = 11 \pm 6$$

$m_1 = 17 \qquad m_2 = 5$

Ho trovato due valori di m quindi esistono due rette passanti per il punto A e tangenti alla parabola data. Ora tra le infinite rette appartenenti al fascio proprio individuo quelle tangenti alla parabola. L'equazione della retta r si ottiene sostituendo il valore: $m_1 = 17$ all'equazione del fascio proprio di rette con centro il punto A.

$$y = mx - \frac{3}{2}m + \frac{9}{2} \quad \rightarrow \quad y = 17x - \frac{3}{2}17 + \frac{9}{2} \quad \rightarrow \quad y = 17x - \frac{42}{2}$$

$r: \ y = 17x - 21$

L'equazione della retta s si ottiene sostituendo il valore: $m_2 = 5$ all'equazione del fascio proprio di rette con centro il punto A.

$$y = mx - \frac{3}{2}m + \frac{9}{2} \quad \rightarrow \quad y = 5x - \frac{3}{2}5 + \frac{9}{2} \quad \rightarrow \quad y = 5x - \frac{6}{2}$$

$s: \ \ y = 5x - 3$

Per trovare i punti di contatto si risolve il sistema costituito dall'equazione della retta e da quella della parabola.

Determino il punto P (intersezione della parabola con la retta r):

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 5x - 3 \\ y = 17x - 21 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 = 17x - 21 \\ y = 17x - 21 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 - 17x + 21 = 0 \\ y = 17x - 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 12x + 18 = 0 \\ y = 17x - 21 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 0 \\ y = 17x - 21 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-3)^2 = 0 \\ y = 17x - 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1-2} = 3 \\ y_{1-2} = 17 * 3 - 21 = 30 \end{cases} \rightarrow \quad P \equiv (3,30)$$

Determino il punto Q (intersezione della parabola con la retta s):

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 5x - 3 \\ y = 5x - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 = 5x - 3 \\ y = 5x - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 - 5x + 3 = 0 \\ y = 5x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 = 0 \\ y = 5x - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ y = 5x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1-2} = 0 \\ y_{1-2} = 5 * 0 - 3 = -3 \end{cases} \rightarrow \quad Q \equiv (0,-3)$$

Tangenti alla parabola nel punto B$\equiv (-2,-7)$:

Scrivo l'equazione di un generico fascio proprio di rette:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Individuo il fascio proprio di centro A:

$$y + 7 = m(x + 2) \quad \rightarrow \quad y + 7 = mx + 2m \quad \rightarrow \quad y = mx + 2m - 7$$

Per individuare le rette del fascio che hanno punti in comune con la parabola imposto il sistema:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 5x - 3 \\ y = mx + 2m - 7 \end{cases} \rightarrow \quad 2x^2 + 5x - 3 = mx + 2m - 7$$

$$2x^2 + 5x - 3 - mx - 2m + 7 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 + (5 - m)x - 2m + 4 = 0$$

Per trovare le rette tangenti devo determinare m in modo che il discriminante di questa equazione sia nullo: la condizione di tangenza, infatti, impone che ciascuna retta incontri la parabola in due punti coincidenti.

$$\Delta = (5 - m)^2 - 4 * 2(4 - 2m) = 25 - 10m + m^2 - 8(4 - 2m) = 0$$

$$\Delta = 25 - 10m + m^2 - 32 + 16m = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 + 6m - 7 = 0$$

Calcolo i valori di m:

$$m_{1-2} = -3 \pm \sqrt{3^2 + 7} = -3 \pm \sqrt{9+7} = -3 \pm \sqrt{16} = -3 \pm 4$$

$m_1 = 1$ $\qquad m_2 = -7$

Ho trovato due valori di m quindi esistono due rette passanti per il punto B e tangenti alla parabola data. Ora tra le infinite rette appartenenti al fascio proprio individuo quelle tangenti alla parabola. L'equazione della retta t si ottiene sostituendo il valore: $m_1 = 1$ all'equazione del fascio proprio di rette con centro il punto B.

$$y = mx + 2m - 7 \quad \rightarrow \quad y = x + 2 - 7$$

$t:\; y = x - 5$

L'equazione della retta u si ottiene sostituendo il valore: $m_2 = -7$ all'equazione del fascio proprio di rette con centro il punto B.

$$y = mx + 2m - 7 \quad \rightarrow \quad y = -7x + 2(-7) - 7 \quad \rightarrow \quad y = -7x - 14 - 7$$

$u:\; y = -7x - 21$

Per trovare i punti di contatto si risolve il sistema costituito dall'equazione della retta e da quella della parabola.

Determino il punto R (intersezione della parabola con la retta t):

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 5x - 3 \\ y = -7x - 21 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 = -7x - 21 \\ y = -7x - 21 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 + 7x + 21 = 0 \\ y = -7x - 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 12x + 18 = 0 \\ y = -7x - 21 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 9 = 0 \\ y = -7x - 21 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x+3)^2 = 0 \\ y = -7x - 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1-2} = -3 \\ y_{1-2} = -7(-3) - 21 = 21 - 21 = 0 \end{cases} \rightarrow \; R \equiv (-3,0)$$

Determino il punto S (intersezione della parabola con la retta u):

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 5x - 3 \\ y = x - 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 = x - 5 \\ y = x - 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 - x + 5 = 0 \\ y = x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 4x + 2 = 0 \\ y = x - 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ y = x - 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 0 \\ y = x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1-2} = -1 \\ y_{1-2} = -1 - 5 = -6 \end{cases} \rightarrow \; S \equiv (-1,-6)$$

Equazione della retta passante per i punti $\boldsymbol{P \equiv (3,\ 30)}$ *e* $\boldsymbol{Q \equiv (0,-3)}$:

Scrivo l'equazione di una generica retta:

$$y = mx + q$$

Imposto il sistema per trovare m e q:

$$\begin{cases} 30 = 3m + q \\ -3 = 0 * m + q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q = -3 \\ 30 = 3m - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q = -3 \\ 3m = 27 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q = -3 \\ m = 9 \end{cases}$$

Equazione della retta:

$y = 9x - 3$

Equazione della retta passante per i punti R$\equiv (-3,\ 0)$ e $S \equiv (-1,-6)$:

Scrivo l'equazione di una generica retta:

$$y = mx + q$$

Imposto il sistema per trovare m e q:

$$\begin{cases} 0 = -3m + q \\ -6 = -m + q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q = 3m \\ -6 = -m + 3m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q = 3m \\ 2m = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ q = -9 \end{cases}$$

Equazione della retta:

$y = -3x - 9$

Intersezione tra queste due rette:

$$\begin{cases} y = 9x - 3 \\ y = -3x - 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x - 9 = 9x - 3 \\ y = 9x - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -12x = 6 \\ y = 9x - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{9}{2} - 3 = -\dfrac{15}{2} \end{cases}$$

Il punto cercato ha coordinate $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{15}{2}\right)$.

Equazione della retta passante per i punti $A \equiv \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$ e $B \equiv (-2,-7)$:

Scrivo l'equazione di una generica retta:

$$y = mx + q$$

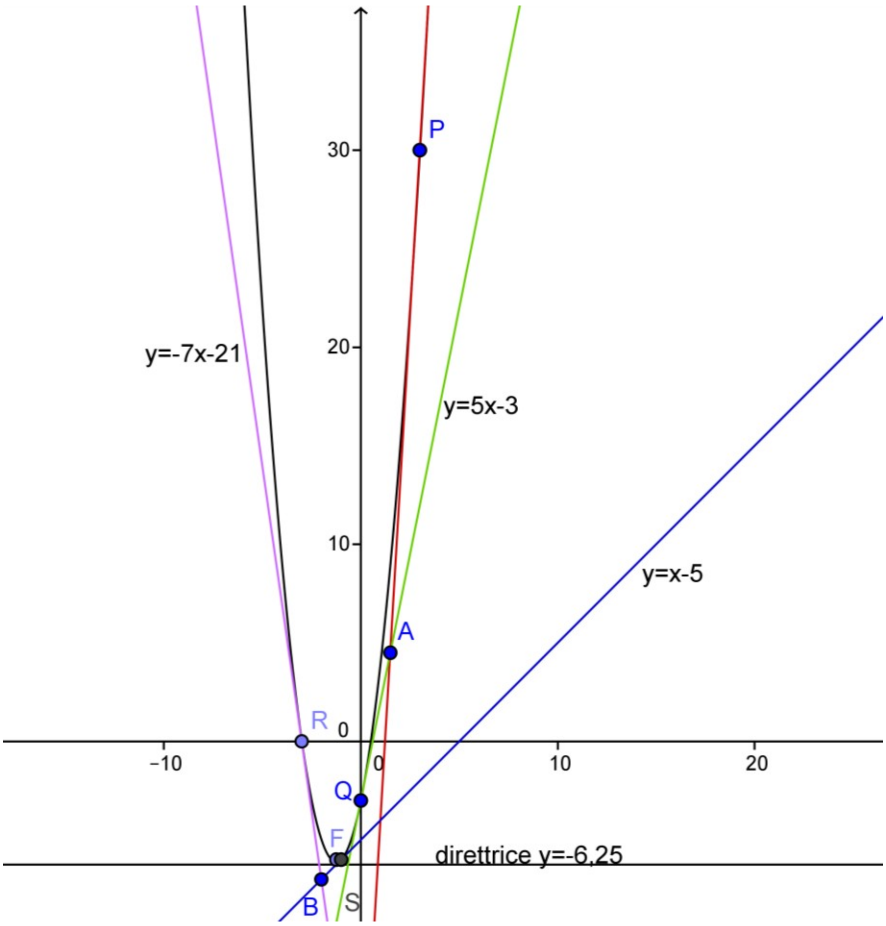
Imposto il sistema per trovare m e q:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{2} = \dfrac{3}{2}m + q \\ -7 = -2m + q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3m + 2q = 9 \\ q = 2m - 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3m + 2(2m - 7) = 9 \\ q = 2m - 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3m + 4m - 14 = 9 \\ q = 2m - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7m = 23 \\ q = 2m - 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{23}{7} \\ q = 2\dfrac{23}{7} - 7 = \dfrac{46 - 7}{7} = \dfrac{39}{7} \end{cases}$$

Equazione della retta:

$$y = \frac{23}{7}x + \frac{39}{7}$$


y=-7x-21
y=5x-3
y=x-5
P
A
R
Q
F
B
S
direttrice y=-6,25
30
20
10
0
−10
10
20