Esercizio 9

Trovare l'equazione della parabola con la concavità rivolta verso l'alto e con asse parallelo all'asse y che passa per $A = (1; -4)$ ed ha fuoco in $F = \left(-1; -\frac{31}{4}\right)$. Determinare l'equazione della circonferenza γ con centro nel vertice della parabola e raggio tale che l'area individuata da γ sia π volte l'area racchiusa nel segmento parabolico compreso tra la parabola e la retta $y = 1$.

Svolgimento

Scriviamo l'equa zione di una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate:

$$y = ax^2 + bx + c$$

La parabola deve avere la concavità rivolta verso l'alto quindi deve essere $a > 0$.
Deve passare per il punto A:

$$-4 = a1^2 + b \cdot 1 + c \quad \rightarrow \quad a + b + c = -4$$

L'ascissa del fuoco deve essere:

$$-1 = -\frac{b}{2a} \quad \rightarrow \quad \frac{b}{2a} = 1$$

L'ordinata del fuoco deve essere:

$$-\frac{31}{4} = \frac{1 - \Delta}{4a} \quad \rightarrow \quad -\frac{31}{4} = \frac{1 - (b^2 - 4ac)}{4a}$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = -4 \\ \dfrac{b}{2a} = 1 \\ -\dfrac{31}{4} = \dfrac{1 - (b^2 - 4ac)}{4a} \\ a > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a + 2a + c = -4 \\ -31a = 1 - 4a^2 + 4ac \\ a > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = -4 - 3a \\ -31a = 1 - 4a^2 + 4a(-4 - 3a) \\ a > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2a \\ c = -4 - 3a \\ -31a = 1 - 4a^2 - 16a - 12a^2 \\ a > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = -4 - 3a \\ 16a^2 - 15a - 1 = 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

Troviamo a:

$$a_{1-2} = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 16(-1)}}{2 \cdot 16} = \frac{15 \pm \sqrt{225 + 64}}{32} = \frac{15 \pm \sqrt{289}}{32} = \frac{15 \pm 17}{32}$$

$$a_1 = \frac{32}{32} = 1 \quad a_2 = -\frac{2}{32} = -\frac{1}{16}$$

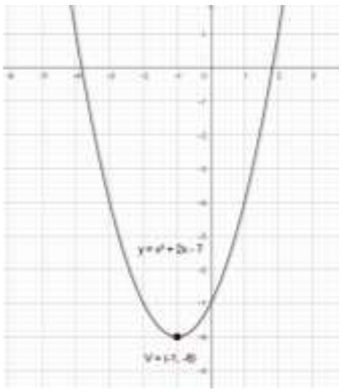
La soluzione negativa non è accettabile quindi esiste una sola parabola che soddisfa i requisiti.

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -7 \end{cases} \quad \rightarrow \quad y = x^2 + 2x - 7$$

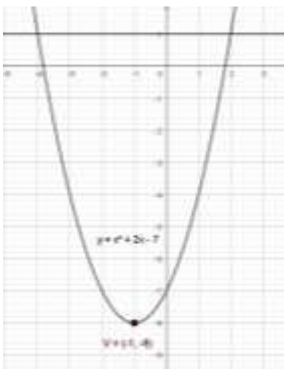
Troviamo l'equazione della circonferenza γ. Deve avere il centro nel vertice della parabola quindi le coordinare del centro devono essere:

$$C = V = \left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$C = \left(-\frac{2}{2 \cdot 1};\ -\frac{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}{4 \cdot 1}\right) = \left(-1;\ -\frac{32}{4}\right) = (-1;\ -8)$$



Per determinare il raggio dobbiamo calcolare l'area racchiusa dal segmento parabolico compreso tra la parabola e la retta *y=1*.



Posto:

$$f(x) = 1\ e\ g(x) = x^2 + 2x - 7$$

La funzione integranda è data dalla differenza tra le due funzioni che delimitano l'area. Poiché, come si vede dalla figura, $f(x) \geq g(x)$ l'integrale è dato da:

$$\int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\, dx$$

Troviamo gli estremi di integrazione cioè i punti di intersezione della parabola con la retta $y = 1$:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 7 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$1 = x^2 + 2x - 7 \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x_{1-2} = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \cdot (-8)} = -1 \pm \sqrt{9} = -1 \pm 3$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -4$$

Calcoliamo l'integrale:

$$A_{Intersezione} = \int_{-4}^{2} 1 - (x^2 + 2x - 7)dx = \int_{-4}^{2} (-x^2 - 2x + 8)dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x \Big|_{-4}^{2} = -\frac{2^3}{3} - 2^2 + 8 \cdot 2 + \frac{(-4)^3}{3} + (-4)^2 - 8 \cdot (-4) =$$

$$= -\frac{8}{3} - 4 + 16 - \frac{64}{3} + 16 + 32 = 60 - \frac{72}{3} = 60 - 24 = 36$$

L'area della circonferenza da determinare deve essere:

$$A_\gamma = \pi \cdot A_{Intersezione}$$

Quindi:

$$\pi r^2 = 36\pi$$

Raggio circonferenza:

$$r = \sqrt{36} = 6$$

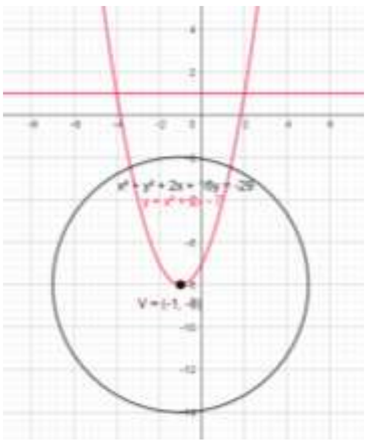
Scriviamo l'equazione della circonferenza di centro $C = (-1; -8)$ e raggio 6:

$$(x + 1)^2 + (y + 8)^2 = 36$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 16y + 64 = 36$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 16y + 29 = 0$$

Grafico:



Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales