Esercizio 2

Una classe è formata da 18 maschi e 9 femmine; per la correzione di una verifica l'insegnante decide di prendere gruppi di 9 compiti. Determinare, dopo aver definito lo spazio fondamentale e le sue caratteristiche:

- la probabilità dei seguenti eventi:
  A. vengono scelte verifiche di soli maschi;
  B. vengono scelte verifiche di almeno 5 maschi;
  C. non ci sono le verifiche di Caio e Tizio;
  D. si realizza A ma non B;
  E. si realizzano A e B ma non C;
  F. indicata con X la variabile casuale "numero di verifiche di studenti maschi" dare la legge di probabilità, il valore medio e lo scarto quadratico medio.

Svolgimento

Lo spazio fondamentale Ω è costituito da tutte le sequenze di 9 compiti e contiene (non ci interessa l'ordinamento quindi useremo le combinazioni):

$$C_{27,9} = \binom{27}{9} = \frac{27!}{18!\,9!} = 4.686.825$$

elementi.

A. Le verifiche di soli maschi sono:

$$C_{18,9} = \binom{18}{9} = \frac{18!}{9!\,9!} = 48.620$$

Infatti i maschi sono 18 e prendo 9 verifiche. La probabilità che vengano scelte verifiche di soli maschi vale:

$$p(A) = \frac{numero\ sequenze\ di\ 9\ maschi}{numero\ totale\ sequenze} = \frac{48.620}{4.686.825} = 0{,}0103 = 1{,}03\%$$

Potevamo anche ragionare nel seguente modo:

quando estraggo il primo compito ho 18 possibilità su 27, quando estraggo il secondo ho 17 possibilità su 26 e così via fino al nono. La probabilità cercata è data da:

$$p(A) = \frac{18}{27}\frac{17}{26}\frac{16}{25}\frac{15}{24}\frac{14}{23}\frac{13}{22}\frac{12}{21}\frac{11}{20}\frac{10}{19} = 0{,}0103 = 1{,}03\%$$

B. Contiamo le verifiche con almeno 5 maschi. Possiamo contare prima le sequenze con 5 maschi e 4 femmine, poi quelle con 6 maschi e 3 femmine ecc. e poi sommarle.
Contiamo le sequenze con 5 maschi e 4 femmine.

$$numero\ sequenze\ con\ 5\ maschi = C_{18,5} \cdot C_{9,4} = \binom{18}{5}\binom{9}{4} =$$

$$= \frac{18!}{13!\,5!}\frac{9!}{5!\,4!} = 1.079.568$$

Contiamo le sequenze con 6 maschi e 3 femmine:

$$numero\ sequenze\ con\ 6\ maschi = C_{18,6} \cdot C_{9,3} = \binom{18}{6}\binom{9}{3} =$$

$$= \frac{18!}{12!\,6!}\frac{9!}{6!\,3!} = 1.559.376$$

Contiamo le sequenze con 7 maschi e 2 femmine:

$$numero\ sequenze\ con\ 7\ maschi = C_{18,7} \cdot C_{9,2} = \binom{18}{7}\binom{9}{2} =$$

$$= \frac{18!}{11!\,7!}\frac{9!}{7!\,2!} = 1.145.664$$

Contiamo le sequenze con 8 maschi e 1 femmina:

$$numero\ sequenze\ con\ 8\ maschi = C_{18,8} \cdot C_{9,1} = \binom{18}{8}\binom{9}{1} =$$

$$= \frac{18!}{10!\,8!}\frac{9!}{8!\,1!} = 393.822$$

Abbiamo già contato le sequenze con 9 maschi quindi:

$$sequenze\ con\ almeno\ 5\ maschi = C_{18,5} \cdot C_{9,4} + C_{18,6} \cdot C_{9,3} + +C_{18,7} \cdot C_{9,2} + C_{18,8} \cdot C_{9,1} + C_{18,9} =$$

$$= 1.079.568 + 1.559.376 + 1.145.664 + 393.822 + 48.620 = 4.227.050$$

$$p(B) = \frac{numero\ sequenze\ di\ almeno\ 5\ maschi}{numero\ totale\ sequenze} = \frac{4.227.050}{4.686.825} = 0{,}9019 = 90{,}19\%$$

C. Se non ci sono le verifiche di Caio o di Tizio ne dobbiamo prendere 9 tra le restanti 25 quindi:

$$numero\ sequenze\ esclusi\ C.\, e\ T, = C_{25,9} = \binom{25}{9} = \frac{25!}{16!\,9!} = 2.042.975$$

$$p(C) = \frac{numero\ sequenze\ esclusi\ C.\, e\ T,}{numero\ totale\ sequenze} = \frac{2.042.975}{4.686.825} = 0{,}4358 = 43{,}58\%$$

Potevamo usare anche il metodo alternativo come al punto A:

$$p(C) = \frac{25}{27}\frac{24}{26}\frac{23}{25}\frac{22}{24}\frac{21}{23}\frac{20}{22}\frac{19}{21}\frac{18}{20}\frac{17}{19} = 0{,}4358 = 43{,}58\%$$

D. Si realizza A: vengono scelte verifiche di soli maschi.
Non si realizza B: non vengono scelte verifiche di almeno 5 maschi.
Gli eventi sono incompatibili[1] quindi:

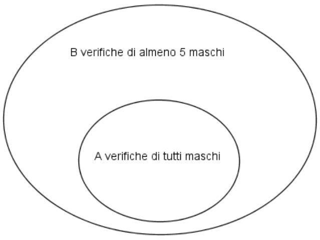
$$p(D) = 0$$

E. Si verificano A e B quindi vengono scelte le verifiche di almeno 5 maschi. L'insieme A è sottoinsieme dell'insieme B perché le verifiche di tutti maschi sono anche verifiche di almeno 5 maschi. I due eventi sono compatibili[2] quindi:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) = p(B)$$

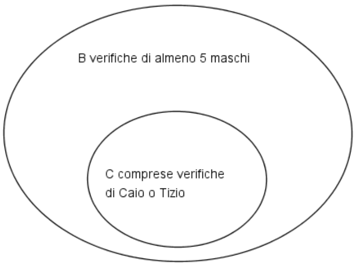
[1] Due eventi sono incompatibili se il verificarsi di uno esclude il verificarsi contemporaneamente dell'altro.

[2] Due eventi sono compatibili se possono verificarsi contemporaneamente. La probebilità del loro evento unione è data dalla somma delle loro probabilità diminuita della probabilità della loro intersezione.



Finora abbiamo trovato la probabilità che si verifichino A e B. Adesso aggiungiamo la locuzione C: non ci sono le verifiche di Caio o Tizio. La dobbiamo negare quindi dobbiamo calcolare la probabilità che le verifiche siano di almeno 5 maschi e che ci siano quelle di Tizio e Caio. Non è specificato il sesso di Caio o Tizio quindi ci sono 3 casi:

- Tizio e Caio entrambi maschi: C è sottoinsieme di B.



Nelle sequenze di 9 elementi ne avremo 2 fissi quindi contiamo contenenti almeno 5 verifiche di maschi comprese quelle di Caio e Tizio:

$$5\ maschi\ tra\ cui\ C.e\ T. = C_{16,3} \cdot C_{9,4} = \binom{16}{3}\binom{9}{4} = \frac{16!}{13!\,3!}\frac{9!}{5!\,4!} = 70.560$$

Procediamo come al punto B:

$$6\ maschi\ tra\ cui\ C.e\ T. = C_{16,4} \cdot C_{9,3} = \binom{16}{4}\binom{9}{3} = \frac{16!}{12!\,4!}\frac{9!}{6!\,3!} = 152.880$$

$$7\ maschi\ tra\ cui\ C.e\ T. = C_{16,5} \cdot C_{9,2} = \binom{16}{5}\binom{9}{2} = \frac{16!}{11!\,5!}\frac{9!}{7!\,2!} = 157.248$$

$$8\ maschi\ tra\ cui\ C.e\ T. = C_{16,6} \cdot C_{9,1} = \binom{16}{6}\binom{9}{1} = \frac{16!}{10!\,6!}\frac{9!}{8!\,1!} = 72.072$$

$$9\ maschi\ tra\ cui\ C.e\ T. = C_{16,7} = \binom{16}{7} = \frac{16!}{9!\,7!} = 11.440$$

$$almeno\ 5\ maschi\ tra\ cui\ C.e\ T. = 70.560 + 152.880 + 157.248 + 72.072 + 11.440 =$$

$$= 464.200$$

$$p(E) = \frac{almeno\ 5\ maschi\ tra\ cui\ C.e\ T.}{totale\ sequenze} = \frac{464.200}{4.686.825} = 0{,}099 = 9{,}9\%$$

- Caio e Tizio sono un maschio ed una femmina:

$$5\ maschi\ tra\ cui\ C.e\ T. = C_{17,4} \cdot C_{8,3} = \binom{17}{4}\binom{8}{3} = \frac{17!}{13!\,4!}\frac{8!}{5!\,3!} = 133.280$$

$$6\ maschi\ tra\ cui\ C.e\ T. = C_{17,5} \cdot C_{8,2} = \binom{17}{5}\binom{8}{2} = \frac{17!}{12!\,5!}\frac{8!}{6!\,2!} = 173.264$$

$$7\ maschi\ tra\ cui\ C.e\ T. = C_{17,6} \cdot C_{8,1} = \binom{17}{6}\binom{8}{1} = \frac{17!}{11!\,6!}\frac{8!}{7!\,1!} = 99.008$$

$$8\ maschi\ tra\ cui\ C.e\ T. = C_{17,7} = \binom{17}{7} = \frac{17!}{10!\,7!} = 19.440$$

$$p(E) = \frac{almeno\ 5\ maschi\ tra\ cui\ C.e\ T.}{totale\ sequenze} = \frac{424.992}{4.686.825} = 0{,}091 = 9{,}1\%$$

- Caio e Tizio sono entrambe femmine:

$$5\ maschi\ tra\ cui\ C.e\ T. = C_{18,5} \cdot C_{7,2} = \binom{18}{5}\binom{7}{2} = \frac{18!}{13!\,5!}\frac{7!}{5!\,2!} = 179.928$$

$$6\ maschi\ tra\ cui\ C.e\ T. = C_{18,6} \cdot C_{7,1} = \binom{18}{6}\binom{7}{1} = \frac{18!}{12!\,6!}\frac{7!}{6!\,1!} = 129.948$$

$$7\ maschi\ tra\ cui\ C.e\ T. = C_{18,7} = \binom{18}{7} = \frac{18!}{11!\,7!} = 31.824$$

$$p(E) = \frac{almeno\ 5\ maschi\ tra\ cui\ C.e\ T.}{totale\ sequenze} = \frac{341.700}{4.686.825} = 0{,}0073 = 0{,}73\%$$

F. X=numero verifiche studenti maschi. Costruiamo la tabella:

X_i	**$p(X_i)$**
0	$\frac{\binom{9}{9}}{\binom{27}{9}} = 2.13 \cdot 10^{-7}$
1	$\frac{\binom{18}{1}\binom{9}{8}}{\binom{27}{9}} = 3.46 \cdot 10^{-5}$
2	$\frac{\binom{18}{2}\binom{9}{7}}{\binom{27}{9}} = 1.17 \cdot 10^{-3}$
3	$\frac{\binom{18}{3}\binom{9}{6}}{\binom{27}{9}} = 1.46 \cdot 10^{-2}$
4	$\frac{\binom{18}{4}\binom{9}{5}}{\binom{27}{9}} = 8.22 \cdot 10^{-2}$

X_i	$p(X_i)$
5	$\frac{\binom{18}{5}\binom{9}{4}}{\binom{27}{9}} = 0.2303$
6	$\frac{\binom{18}{6}\binom{9}{3}}{\binom{27}{9}} = 0.3327$
7	$\frac{\binom{18}{7}\binom{9}{2}}{\binom{27}{9}} = 0.2444$
8	$\frac{\binom{18}{8}\binom{9}{1}}{\binom{27}{9}} = 8.40 \cdot 10^{-2}$
9	$\frac{\binom{18}{9}}{\binom{27}{9}} = 1.03 \cdot 10^{-2}$

Se, per verifica, sommiamo tutte le probabilità otteniamo 0.999 in accordo con le approssimazioni della calcolatrice.

Il valore medio è dato da:

$$\mu = \sum_{i=0}^{9} X_i \cdot p(X_i) = 5.99$$

Calcoliamo lo scarto quadratico medio:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=0}^{9} [X_i - \mu]^2 p(X)} = 1.18$$

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales