Esercizio 4

Sulla composizione di un'urna contenente 35 palline di cui H rosse si fanno 3 ipotesi:

1. H=10 con probabilità 0.25;
2. H=20 con probabilità 0.38;
3. H=30 con probabilità 0.37.

Si estrae a caso una pallina, calcolare:

- La probabilità che sia rossa.
- Se la pallina estratta è rossa, qual è la probabilità che H sia uguale a 10?

Svolgimento

Definiamo i seguenti eventi:

R=viene estratta una pallina rossa;
H_1=l'urna contiene 10 palline rosse;
H_2=l'urna contiene 20 palline rosse;
H_3=l'urna contiene 30 palline rosse.

Osserviamo che

- gli eventi H_1, H_2 e H_3 sono a due a due disgiunti (la loro intersezione è vuota);
- la loro unione coincide con lo spazio **Ω** (infatti sommando le probabilità fornite come dati del problema si ottiene 1);
- R è un evento dipendente dagli eventi H_1, H_2 e H_3.

Allora possiamo applicare il teorema della probabilità assoluta:

$$p(R) = p(R|H_1)p(H_1) + p(R|H_2)p(H_2) + p(R|H_3)p(H_3)$$

Si trovano le seguenti probabilità:

$$p(R|H_1) = \frac{10}{35} = \frac{2}{7} = 0.28$$

$$p(R|H_2) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} = 0.57$$

$$p(R|H_3) = \frac{30}{35} = \frac{6}{7} = 0.88$$

e la probabilità cercata:

$$p(R) = 0.28 \cdot 0.25 + 0.57 \cdot 0.38 + 0.88 \cdot 0.37 = 0.61$$

Per rispondere alla seconda domanda dobbiamo trovare la probabilità $p(H_1|R)$. Applichiamo il teorema di Bayes.

$$p(H_1|R) = \frac{p(H_1)p(R|H_1)}{p(R)} = \frac{0.25 \cdot 0.28}{0.61} = 0.11$$

Matilde Consales