Esercizio 6

Due urne contengono rispettivamente:

- 5 palline bianche e 5 palline nere;
- 3 palline bianche e 5 palline nere.

Da ciascuna urna si estrae una pallina. Indicata con X la variabile casuale che conta il numero totale delle palline bianche estratte, darne la legge di probabilità, il valore medio e la varianza.
Se con il contenuto delle due urne se ne forma una sola dalla quale si estraggono due palline, una alla volta con reinserimento, la variabile casuale Y=numero di palline bianche estratte ha la stessa legge di probabilità della precedente?
Ha la stessa media?
Ha la stessa varianza?

Svolgimento

Si possono verificare 3 casi:

1. non vengono estratte palline bianche: X=0;
2. viene estratta una pallina bianca: X=1;
3. vengono estratte due palline bianche X=2.

Troviamo le probabilità:

Caso 1.
Le palline estratte sono tutte e due nere quindi:

$$p(X=0)=\frac{5}{10}\frac{5}{8}=\frac{25}{80}=\frac{5}{16}$$

Caso 2.
La pallina bianca può essere estratta dalla prima o dalla seconda urna e i due eventi sono indipendenti:

$$p(X=1)=\frac{5}{10}\frac{5}{8}+\frac{5}{10}\frac{3}{8}=\frac{40}{80}=\frac{1}{2}$$

Caso 3.
Le palline estratte sono tutte e due bianche:

$$p(X=2)=\frac{5}{10}\frac{3}{8}=\frac{15}{80}=\frac{3}{16}$$

Quanto ricavato rappresenta la legge di probabilità infatti:

$$p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)=\frac{5}{16}+\frac{1}{2}+\frac{3}{16}=1$$

Calcoliamo adesso la media:

$$\mu=\sum_{i=1}^{3}X_i p(X_i)=0\cdot\frac{5}{16}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{3}{16}=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$$

e la varianza:

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{3}(X_i-\mu)^2\,p(X_i)=1.094$$

Con il contenuto delle due urne formiamo un'unica urna che conterrà 18 palline: 8 bianche e 10 nere. Estraiamo una pallina alla volta con reinserimento e, come prima, troviamo le probabilità:

Caso 1.
Le palline estratte sono tutte e due nere:

$$p(Y=0)=\frac{10}{18}\frac{10}{18}=\frac{25}{81}$$

Caso 2.
Si estrae una pallina bianca che può essere la prima o la seconda estratta.

$$p(Y=1)=\frac{8}{18}\frac{10}{18}+\frac{10}{18}\frac{8}{18}=\frac{40}{81}$$

Caso 3.
Le palline estratte sono tutte e due bianche:

$$p(Y=2)=\frac{8}{18}\frac{8}{18}=\frac{16}{81}$$

Quanto ricavato rappresenta la legge di probabilità infatti:

$$p(Y=0)+p(Y=1)+p(Y=2)=\frac{25}{81}+\frac{40}{81}+\frac{16}{81}=1$$

La variabile casuale Y non ha la stessa legge di probabilità di X.
Calcoliamo la media:

$$\mu=\sum_{i=1}^{3} Y_i p(Y_i)=0\cdot\frac{25}{81}+1\cdot\frac{40}{81}+2\cdot\frac{16}{81}=\frac{40}{81}+\frac{32}{81}=\frac{62}{81}$$

e la varianza:

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{3}(Y_i-\mu)^2\,p(Y_i)=0.914$$

Y non ha nemmeno la stessa media né la stessa varianza.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales