Esercizio 1

Consideriamo le due rette:

$$r: 2x + 3y - 5 = 0$$

$$s: x + 4y - 3 = 0$$

E vediamo se si intersecano in un punto. Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 4y = 3 \end{cases}$$

Usiamo il metodo di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}} = \frac{20 - 9}{8 - 3} = \frac{11}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}} = \frac{6 - 5}{8 - 3} = \frac{1}{5}$$

Si intersecano nel punto $P_0 = \left(\frac{11}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Facciamo la combinazione lineare di queste rette e vediamo se otteniamo ancora una retta:

$$2x + 3y - 5 + k(x + 4y - 3) = 0$$

L'equazione scritta è di primo grado nelle variabili x e y quindi rappresenta ancora una retta. Per ogni valore di k otteniamo l'equazione di una retta quindi abbiamo scritto l'equazione di un insieme di rette. Passano per il punto P_0? Verifichiamo.

$$2x + 3y - 5 + kx + 4ky - 3k = 0$$

$$(2 + k)x + (3 + k)y - 5 - 3k = 0$$

$$(2 + k)\frac{11}{5} + (3 + k)\frac{1}{5} - 5 - 3k = 0$$

$$\frac{22}{5} + \frac{11}{5}k + \frac{3}{5} + \frac{1}{5}k - 5 - 3k = 0$$

$$\frac{22 + 3 - 25}{5} + \frac{11 + 1 - 15}{5}k = 0$$

$$0 + 0k = 0$$

Le rette passano tutte per il punto P_0: abbiamo scritto l'equazione di un fascio proprio di rette.

Adesso ci chiediamo se con la combinazione lineare che abbiamo scritto possiamo esprimere l'equazione di tutte le rette del fascio? Per rispondere a questa domanda Consideriamo un punto qualsiasi del piano $P_1 = (x_1;\ y_1)$. Dato un valore di k la retta:

$$2x + 3y - 5 + k(x + 4y - 3) = 0$$

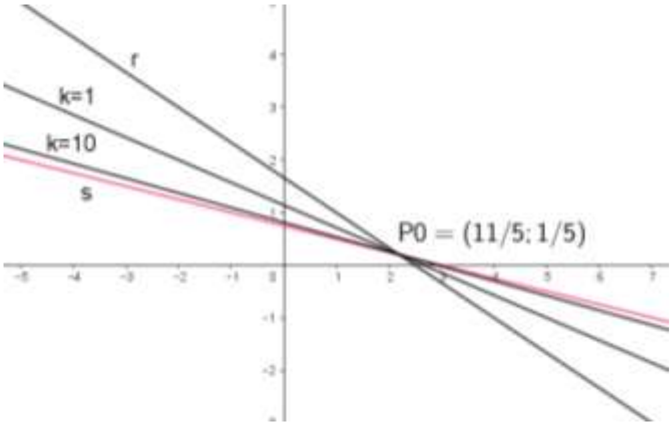
Passerà per il punto P_1 se e solo se:

$$2x_1 + 3y_1 - 5 + k(x_1 + 4y_1 - 3) = 0$$

$$2x_1 + 3y_1 - 5 = -k(x_1 + 4y_1 - 3)$$

$$k = -\frac{2x_1 + 3y_1 - 5}{x_1 + 4y_1 - 3} \quad con\ x_1 + 4y_1 - 3 \neq 0$$

Ma se $x_1 + 4y_1 - 3 = 0$ la retta *s* passa per il punto P_1 ed il punto P_1 è un punto qualsiasi del piano. Quindi con l'equazione $2x + 3y - 5 + k(x + 4y - 3) = 0$ posso rappresentare tutte le rette del fascio esclusa la retta *s*. Facciamo un grafico con Geogebra.



Dal grafico vediamo che se aumenta il valore di *k* la retta individuata dal fascio si avvicina alla retta *s*. Se $k \to \infty$ la retta coincide con la retta *s*.
Per non escludere nessuna retta dobbiamo usare la combinazione lineare:

$$\lambda(2x + 3y - 5) + \mu(x + 4y - 3) = 0$$

Che rappresenta sempre il fascio considerato. In questo modo se $\lambda \neq 0\ e\ \mu = 0$ si ottiene la retta *r*; se $\lambda = 0\ e\ \mu \neq 0$ si ottiene la retta *s*.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales