La retta nel piano cartesiano

Se proviamo a disporre, sul piano cartesiano, una retta vediamo che le sue possibili posizioni sono sei:

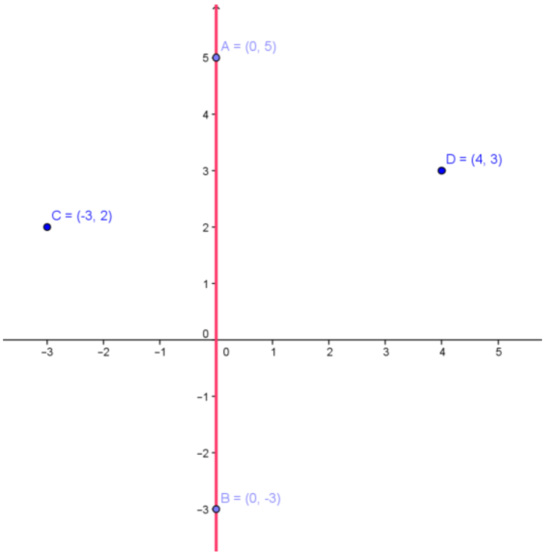
a) Coincidente con l'asse delle y;
b) Coincidente con l'asse delle x;
c) Parallela all'asse delle y;
d) Parallela all'asse delle x;
e) Passante per l'origine degli assi;
f) Generica.

Analiziamo ciascuna di queste situazioni.

a) Coincidente con l'asse delle y:

Tutti i punti dell'asse delle ordinate (asse y) hanno ascissa nulla quindi l'equazione di questa retta è data da:

$$x = 0$$

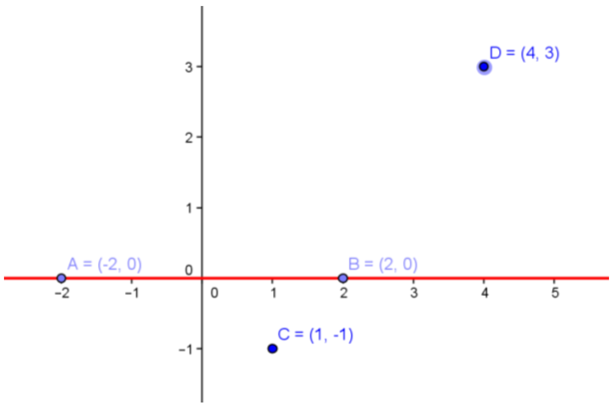


Dalla figura si vede che i punti A e B hanno ascissa nulla (x=0) e appartengono alla retta mentre i punti C e D non hanno ascissa nulla e non appartengono alla retta.

b) Coincidente con l'asse delle x:

Tutti i punti dell'asse delle ascisse (asse x) hanno ordinata nulla quindi l'equazione di questa retta è data da:

$$y = 0$$

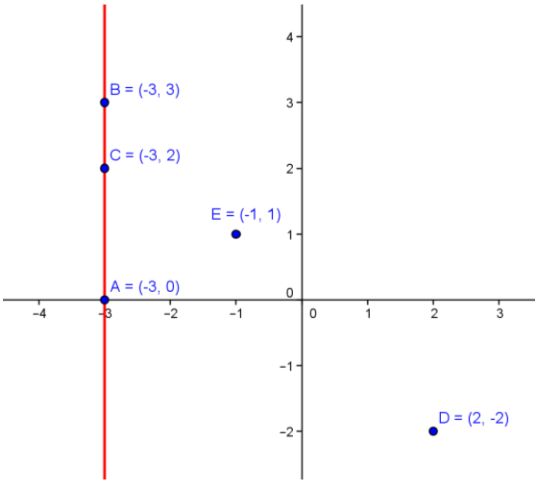


Dalla figura si vede che i punti A e B hanno ordinata nulla (y=0) e appartengono alla retta mentre i punti C e D non hanno ordinata nulla e non appartengono alla retta.

c) Parallela all'asse delle y:

Tutti i punti della retta hanno ascissa dello stesso valore quindi la sua equazione è data da:

$$x = a$$



Dalla figura si vede che i punti A, B e C hanno ascissa uguale a -3 e appartengono alla retta mentre i punti D e E hanno ascissa diversa da -3 e non appartengono alla retta. La retta di figura ha equazione:

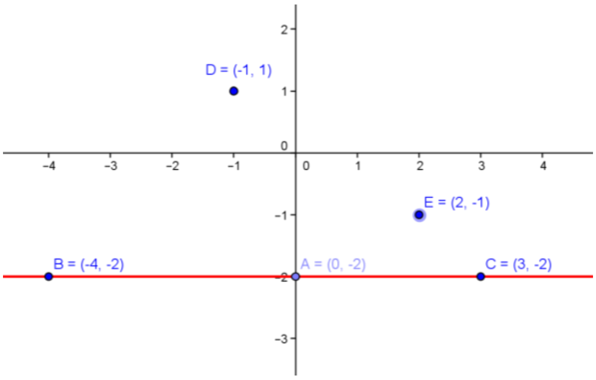
$$x = -3$$

E interseca l'asse delle ascisse nel punto$A \equiv \; -3,0 \;$.

d) Parallela all'asse delle x:

Tutti i punti della retta hanno ordinata dello stesso valore quindi la sua equazione è data da:

$$y = b$$



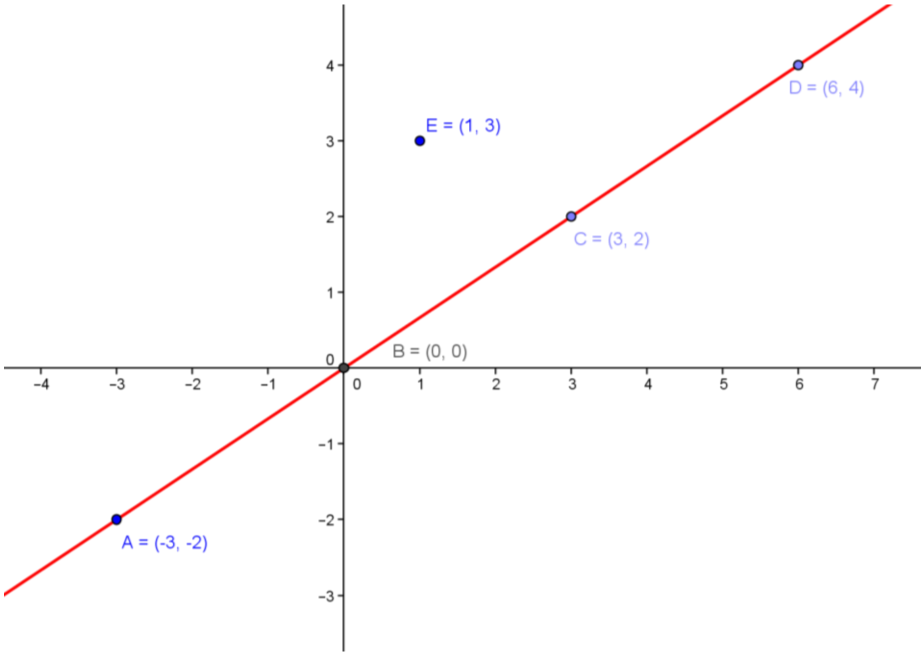
Dalla figura si vede che i punti A, B e C hanno ordinata uguale a -2 e appartengono alla retta mentre i punti D e E hanno ordinata diversa da -2 e non appartengono alla retta. La retta di figura ha equazione:

$$y = -2$$

E interseca l'asse delle ordinate nel punto$A \equiv \; 0,-2 \;$.

e) Passante per l'origine degli assi:

Per trovare l'equazione di questa retta disegnamone una e cerchiamo di capire che relazione esiste tra i suoi punti.



I punti:

$$A \equiv \ -3,-2\ , \qquad B \equiv \ 0,0\ , \qquad C \equiv \ 3,2\ , \qquad D \equiv \ 6,4$$

appartengono alla retta. Il punto $E \equiv \ 1,3$ non appartiene alla retta.
Proviamo a calcolare il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa dei punti A, C, D e E:

$$\frac{y_A}{x_A}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}; \qquad \frac{y_C}{x_C}=\frac{2}{3}\ ; \qquad \frac{y_D}{x_D}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}; \qquad \frac{y_E}{x_E}=\frac{3}{1}=3$$

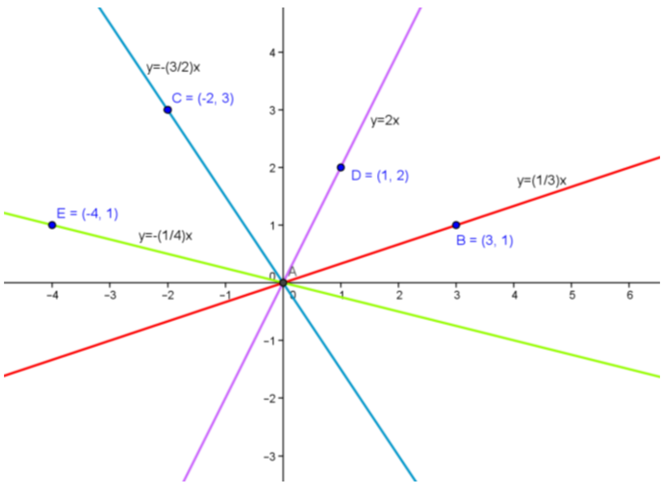
Vediamo che il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa dei punti appartenenti alla retta è costante. Questo rapporto è detto *coefficiente angolare* e si indica con *m*. A questo punto possiamo scrivere l'equazione di una generica retta passante per l'origine:

$$y = mx$$

Per la retta che abbiamo disegnato $m = \frac{2}{3}$ quindi l'equazione della retta disegnata vale:

$$y = \frac{2}{3}x$$

Il coefficiente angolare è strettamente legato all'angolo formato dalla retta con l'asse delle x. Disegnamo alcune rette passanti per l'origine per vedere come stanno le cose.



In figura ho disegnato quattro rette tutte passanti per l'origine ed ho scritto la loro equazione. Notiamo che se il coefficiente angolare è positivo (m>0) la retta forma un angolo acuto con l'asse delle x mentre se il coefficiente angolare è negativo (m<0) la retta forma un angolo ottuso con l'asse delle ascisse.

e) Generica:

Scriviamo l'equazione di una retta generica:

$$y = mx + q$$

m è il coefficiente angolare e q è il punto di intersezione della retta con l'asse y. Infatti ponendo x=0 e sostituendo nell'equazione si trova:

$$y = m * 0 + q = q$$

Per esercizio disegnamo la retta $y = x - 4$. Sappiamo che per due punti passa una ed una sola retta. Troviamo questi due punti: se x=0 l'ordinata vale:

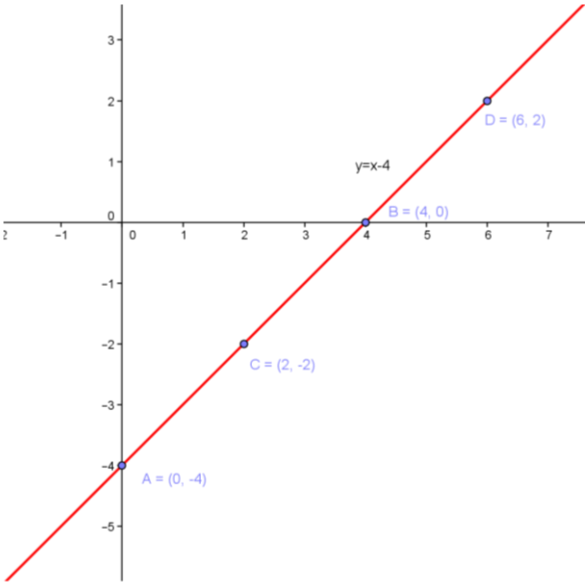
$$y = 0 - 4 = -4$$

La retta passa per il punto $A \equiv \left(0, -4\right)$.

Poniamo adesso y=0 e troviamo il valore che assume x:

$$0 = x - 4 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

La retta passa per il punto $A \equiv \left(4, 0\right)$.



A questo punto possiamo disegnare la retta. Dalla figura si vede che la retta passa anche per i punti $C \equiv \left(2, -2\right) \quad e \quad D \equiv \left(6, 2\right)$. Verifichiamolo.
Passaggio per C. Poniamo x=2 e calcoliamo il valore di y:

$$y = 2 - 4 = -2.$$

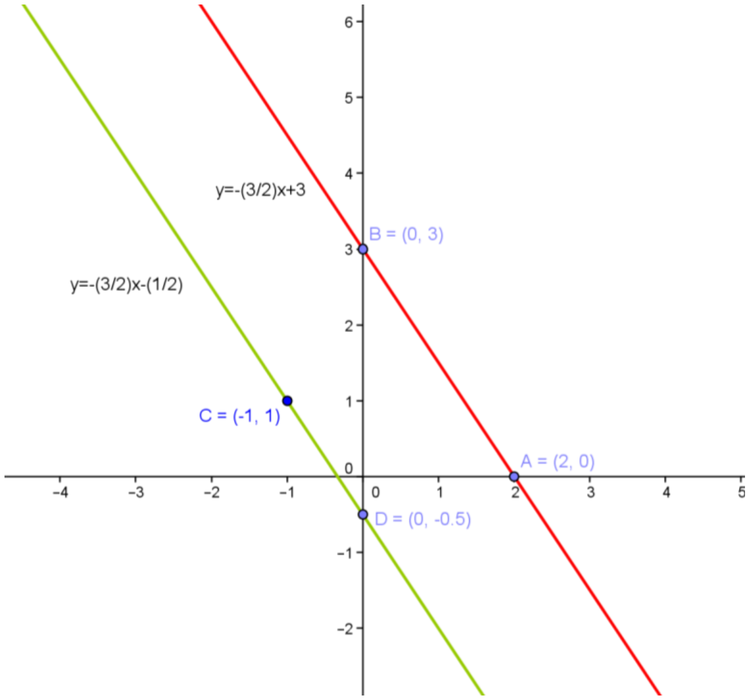
Allo stesso modo verifichiamo il passaggio per D. Poniamo x=6 e calcoliamo il valore di y:

$$y = 6 - 4 = 2$$

Rette parallele e rette perpendicolari:

Due o più rette si dicono *parallele* se non hanno nessun punto in comune (non si incontrano mai). Due rette parallele hanno lo stesso coefficiente angolare (infatti se sono parallele formano lo stesso angolo con l'asse delle ascisse).

Ad esempio le rette di figura hanno coefficiente angolare $m = -\frac{3}{2}$.



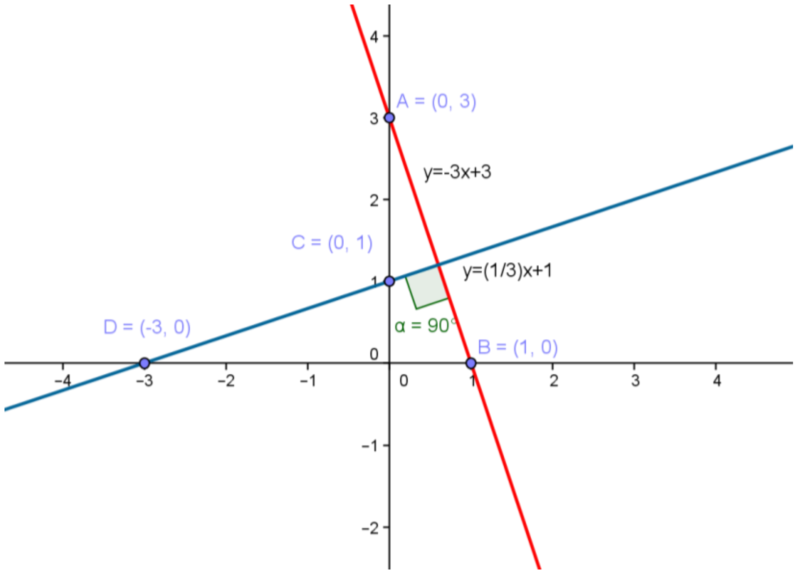
Due rette sono perpendicolari se una ha il coefficiente angolare pari all'opposto del reciproco dell'altra. Siano:

$$r\colon\ y = m_1 x + q_1 \quad e \quad s\colon\ y = m_2 + q_2$$

Due rette generiche. Sono perpendicolari se è verificata la relazione:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

In figura sono disegnate due rette perpendicolari.



Esercizio 1:

Trovare le coordinate del punto di intersezione delle rette di equazione:

$$r: x - 2y - 8 = 0$$

$$s: 2x + y - 1 = 0$$

e determinare la sua distanza dall'origine.

Svolgimento:

Determino il punto di intersezione delle rette date risolvendo il seguente sistema di primo grado di due equazioni in due incognite:

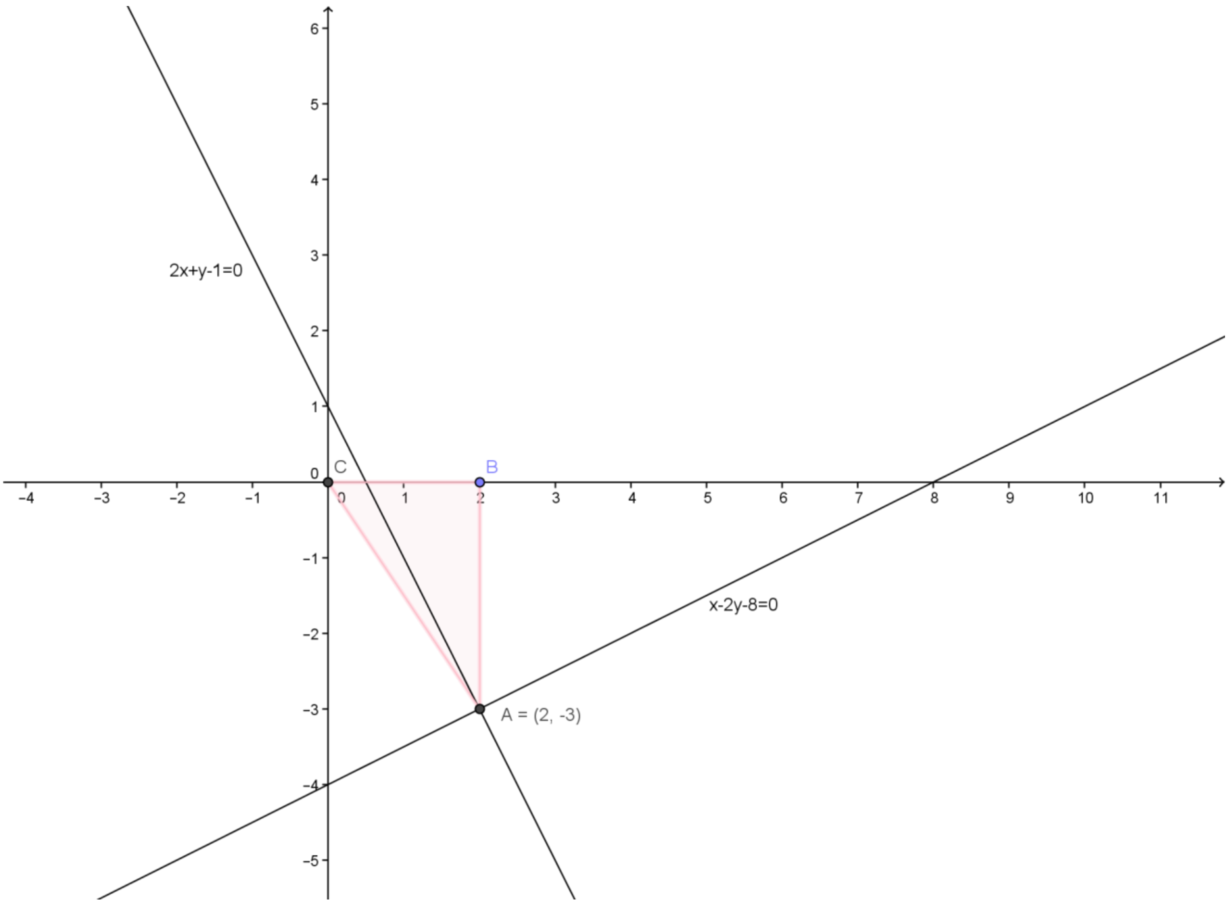
$$\begin{cases} x - 2y - 8 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y + 8 \\ 2(2y + 8) + y - 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 2y + 8 \\ 4y + 16 + y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y + 8 \\ 5y + 15 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + 8 \\ 5y = -15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 2(-3) + 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -6 + 8 \\ y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Il punto cercato ha coordinate $A \equiv (2, -3)$

Trovo la sua distanza dall'origine $O \equiv (0,\ 0)$ per mezzo della relazione (teorema di Pitagora applicato al triangolo di figura):

$$AO = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$



Esercizio 2:

Data la retta di equazione: $2x - 3y + 1 = 0$, determinare:

1. Se il punto $A \equiv \;\; 1, 2 \;\;$ appartiene alla retta;
2. L'ordinata del punto di ascissa 1 appartenente alla retta;
3. Le coordinate dei punti d'intersezione della retta con gli assi cartesiani.

Svolgimento:

1. Per vedere se il punto A appartiene alla retta data sostituisco x=1 e y=2 nell'equazione che la descrive:

$$2x - 3y + 1 = 2 * 1 - 3 * 2 + 1 = 2 - 6 + 1 = -3 \neq 0$$

Il punto A non appartiene alla retta.

2. Per trovare l'ordinata del punto di ascissa 1 appartenente alla retta scrivo l'equazione della retta in forma esplicita:

$$y = \frac{2x + 1}{3}$$

Poi sostituisco il valore dell'ascissa:

$$y = \frac{2 * 1 + 1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

L'ordinata cercata è 1.

3. Intersezione con l'asse x: si osserva che l'asse x è la retta di equazione y=0 e si risolve il sistema:

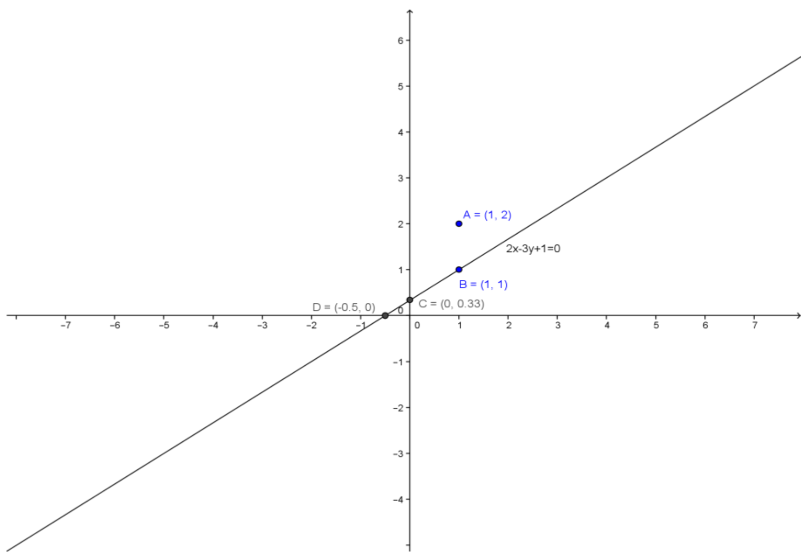
$$\begin{matrix} 2x - 3y + 1 = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 2x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{matrix}$$

Intersezione con l'asse y: si osserva che l'asse y è la retta di equazione x=0 e si risolve il sistema:

$$\begin{matrix} 2x - 3y + 1 = 0 \\ x = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} -3y + 1 = 0 \\ x = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} y = \frac{1}{3} \\ x = 0 \end{matrix}$$

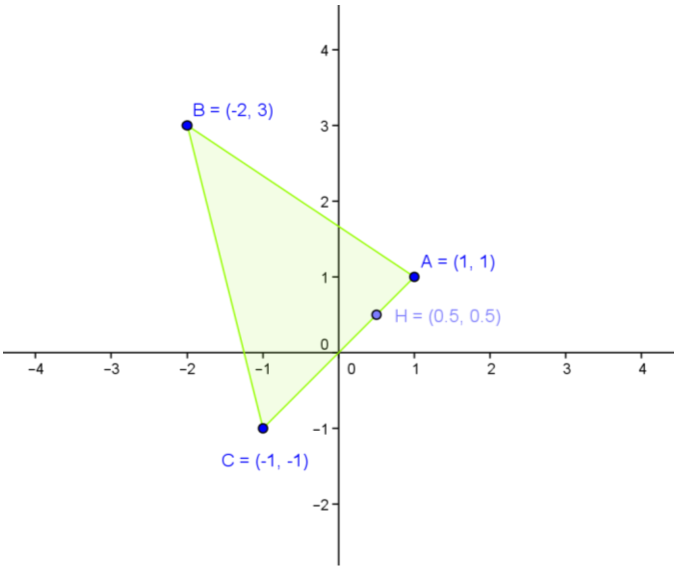
Intersezione asse x: $\;\; -\frac{1}{2}, 0 \;\;$.

Intersezione asse y: $\;\; 0, \frac{1}{3}$



Esercizio 3:
Determinare l'area del triangolo con vertici $A \equiv (1,1)$, $B = (-2,3)$ $C = (-1,-1)$.

Svolgimento:
Calcolo l'area prendendo il lato AC come base.



Prima di tutto trovo l'equazione della retta sostegno del lato AC. Scrivo l'equazione di una retta generica:

$$y = mx + q$$

e risolvo il seguente sistema:

$$f(x) = \begin{cases} 1 = m + q \quad \textit{passaggio per } A \\ -1 = -m + q \quad \textit{passaggio per } C \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = 1 - q \\ -1 = -1 + q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

equazione della retta sostegno del lato AC

$$y = x$$

Adesso devo determinare l'equazione della retta perpendicolare ad AC e passante per il punto B. (Ricordo che l'altezza di un triangolo è il segmento perpendicolare che congiunge un vertice al lato opposto).
Equazione di una retta generica perpendicolare ad AC:

$$y = -x + q$$

(Ricordo che il coefficiente angolare m_1 di una retta perpendicolare ad una retta r è l'opposto del reciproco del coefficiente angolare di r. $m_1 = -\frac{1}{m}$).
Impongo il passaggio per B:

$$3 = 2 + q \quad \rightarrow \quad q = 1$$

Retta sostegno del segmento BH:

$$y = -x + 1$$

Determino le coordinate del punto H risolvendo il sistema di primo grado di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = -x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi $H \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

L’area del triangolo è data da:

$$S = \frac{AC * BH}{2}$$

$$AC = \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2} = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$BH = \sqrt{(x_h - x_b)^2 + (y_h - y_b)^2} = \sqrt{\left(-2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

L’area richiesta vale:

$$S = \frac{2\sqrt{2}\,\frac{5\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$