**Esercizio 1:**
Trovare il valore esatto della serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Sviluppo in serie di Fourier la funzione:

$$f(x) = x^2 \qquad nell'intervallo \ \ -\pi \leq x < \pi$$

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k cos(kx) + b_k sin(kx)]$$

Trovo i coefficienti di Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi^3}{3} - \frac{-\pi^3}{3} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{2}{3} \pi^3 = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx)\, dx$$

Calcolo:

$$\int x^2 \cos(kx)\, dx =$$

per parti:

$u = x^2 \qquad v = \frac{1}{k} \sin(kx)$

$du = 2x dx \qquad dv = \cos(kx)\, dx$

$$= \frac{x^2}{k} \sin(kx) - \frac{2}{k} \int x sin(kx) dx$$

Calcolo:

$$\int x sin(kx) dx =$$

per parti:

$u = x \qquad v = -\frac{1}{k} \cos(kx)$

$du = dx \qquad dv = \sin(kx)\, dx$

$$= -\frac{x}{k} \cos(kx) + \frac{1}{k} \int \cos(kx)\, dx = -\frac{x}{k} \cos(kx) + \frac{1}{k^2} \sin(kx) + C$$

Sostituendo si trova:

$$\int x^2 \cos(kx)\, dx = \frac{x^2}{k} \sin(kx) - \frac{2}{k} \left[ -\frac{x}{k} \cos(kx) + \frac{1}{k^2} \sin(kx) \right] + C =$$

$$= \frac{x^2}{k}\sin(kx) + \frac{2x}{k^2}\cos(kx) - \frac{2}{k^3}\sin(kx) + C$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(kx)\,dx = \frac{x^2}{k}\sin(kx) + \frac{2x}{k^2}\cos(kx) - \frac{2}{k^3}\sin(kx)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi^2}{k}\sin(k\pi) + \frac{2\pi}{k^2}\cos(k\pi) - \frac{2}{\pi^3}\sin(k\pi) - \left[\frac{\pi^2}{k}\sin(-k\pi) - \frac{2\pi}{k^2}\cos(-k\pi) - \frac{2}{\pi^3}\sin(-k\pi)\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{k^2}\cos(k\pi) + \frac{2\pi}{k^2}\cos(-k\pi) = \frac{4\pi}{k^2}\cos(k\pi) =$$

$$= \frac{4\pi}{k^2}\ se\ k\ pari \qquad = -\frac{4\pi}{k^2}\ se\ k\ dispari$$

Quindi:

$$a_k = \frac{4}{k^2}\ se\ k\ pari \qquad a_k = -\frac{4}{k^2}\ se\ k\ dispari$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin(kx)\,dx$$

Osservo che la funzione integranda è dispari, infatti:

$$f(x) = x^2\sin(kx) \qquad f(-x) = (-x)^2\sin(-kx) = -x^2\sin(kx)$$

$$f(x) = -f(-x)$$

quindi il suo integrale nell'intervallo $[-\pi,\ \pi]$ è nullo.

Ma allora:

$$b_k = 0 \qquad \forall\ k \in N$$

Sviluppo in serie di Fourier:

$$x^2 = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{4}{k^2}cos(kx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}cos(kx)$$

Adesso pongo x=π:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}cos(k\pi)$$

considero il termine generale della serie:

$$\frac{(-1)^k}{k^2}cos(k\pi) = -\frac{1}{k^2}(-1) = \frac{1}{k^2} \qquad se\ k\ è\ dispari$$

$$\frac{(-1)^k}{k^2}cos(k\pi) = \frac{1}{k^2}1 = \frac{1}{k^2} \qquad se\ k\ è\ pari$$

Ma allora posso scrivere:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{2}{3}\pi^2 = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{2}{3}\pi^2\frac{1}{4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Quindi:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$