

Esercizio 3

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[9n^3 \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right) \right]^n$$

Svolgimento

Per semplificare i calcoli sviluppiamo il termine $\sin \frac{1}{n}$ in serie di Taylor. In un intorno di $x=0$ si ha:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Possiamo sostituire $x = \frac{1}{n}$ infatti $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Quindi:

$$\sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Sostituendo nel termine generico della serie data trascurando i termini non significativi:

$$\left[9n^3 \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right) \right]^n \sim \left[9n^3 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} \right) \right]^n = \left[9n^3 \frac{1}{6n^3} \right]^n = \left[\frac{3}{2} \right]^n$$

Poiché la serie è a termini positivi ed è asintoticamente equivalente alla serie geometrica di ragione $\frac{3}{2}$ diverge.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales