Esercizio 4

Studiare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! - 3n^3 logn + 5 \cdot 3^n}{ncos^2 n + n^{n+1} \cdot arcsin\left(\frac{2}{n}\right)}$$

Svolgimento

Osserviamo che la serie è a termini definitivamente positivi. Infatti il denominatore è sempre positivo ed il numeratore, a parte il secondo termine che non è preponderante, è positivo.
Adesso semplifichiamoci la vita vedendo quali termini "contano" per $n \to +\infty$.
Per possiamo scrivere:

$$\frac{n! - 3n^3 logn + 5 \cdot 3^n}{ncos^2 n + n^{n+1} \cdot arcsin\left(\frac{2}{n}\right)} \sim \frac{n!}{n^{n+1} \cdot arcsin\left(\frac{2}{n}\right)}$$

Sviluppiamo ora in serie di Taylor il termine $arcsin\left(\frac{2}{n}\right)$ in un intorno di *x=0* possiamo farlo $\frac{2}{n} \to 0 \; per \; n \to \infty$.

$$arcsinx = x + o(x)$$

Quindi:

$$arcsin\frac{2}{n} = \frac{2}{n} + o(\frac{2}{n})$$

Sostituendo e trascurando i termini non significativi:

$$\frac{n!}{n^{n+1} \cdot arcsin\left(\frac{2}{n}\right)} \sim \frac{n!}{n^{n+1} \cdot \frac{2}{n}} = \frac{n!}{2n^n}$$

A questo punto applichiamo il criterio del rapporto. Calcoliamo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{2n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{(n+1)!}{2(n+1)^{n+1}} \frac{2n^n}{n!}\right] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Poiché questo limite è minore di 1 possiamo affermare che la serie converge.

Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales