Esercizio 5

Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n^\alpha} arctg \frac{3}{\sqrt{n}}$$

Converge assolutamente?

Cosa succede quando $\alpha = \frac{1}{2}$?

Svolgimento

Per vedere se la serie converge assolutamente consideriamo la serie con il valore assoluto del termine generale:

$$a_n = \left|(-1)^n \frac{1}{n^\alpha} arctg \frac{3}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{n^\alpha} arctg \frac{3}{\sqrt{n}}$$

Sviluppiamo in serie di Taylor in un intorno di $x=0$ l'arcotangente arrestandoci al primo termine:

$$arctgx = x + o(x)$$

Poiché $\frac{3}{\sqrt{n}} \to 0 \; per \; n \to +\infty$ possiamo scrivere:

$$arctg \frac{3}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)$$

Riscriviamo il termine generale della serie in esame:

$$a_n \sim \frac{1}{n^\alpha}\frac{3}{\sqrt{n}} = \frac{3}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

Si vede che siamo di fronte alla serie armonica generalizzata che converge se:

$$\alpha + \frac{1}{2} > 1 \quad \to \quad \alpha > \frac{1}{2}$$

Per questi valori la serie data converge assolutamente.

Se $\alpha = \frac{1}{2}$ il termine generico della serie diventa:

$$a_n = \frac{3}{n}$$

In questo caso la serie converge semplicemente. (Serie armonica).

Matilde Consales