Esercizio 6

Studiare il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{5n^2}$$

Svolgimento

Utilizziamo il criterio del rapporto. Calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{2(n+1)}\right)^{5(n+1)^2}}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{5n^2}}=$$

Serviamoci dell'identità esponenziale e scriviamo:

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{5(n+1)^2\ln\left(1-\frac{1}{2(n+1)}\right)}}{e^{5n^2\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)}}=$$

Consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor del logaritmo naturale in un intorno di *x=0*:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

Ci arrestiamo al primo termine e, dato che $-\frac{1}{2(n+1)}\to 0\ per\ n\to+\infty$, possiamo scrivere:

$$\ln\left(1-\frac{1}{2(n+1)}\right)\sim-\frac{1}{2(n+1)}$$

Analogamente:

$$\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\sim-\frac{1}{2n}$$

Sostituendo si trova:

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{5(n+1)^2\left(-\frac{1}{2(n+1)}\right)}}{e^{5n^2\left(-\frac{1}{2n}\right)}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-\frac{5(n+1)^2}{2(n+1)}}}{e^{-\frac{5n^2}{2n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-\frac{5}{2}(n+1)}}{e^{-\frac{5}{2}n}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-\frac{5}{2}n}e^{-\frac{5}{2}}}{e^{-\frac{5}{2}n}}=e^{-\frac{5}{2}}\cong 8.2\cdot 10^{-2}<1$$

La serie converge.

Matilde Consales