Esercizio 7

Studiare il carattere della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n \left(1-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)^{n^{\frac{5}{2}}}$$

Svolgimento

Utilizziamo il criterio del rapporto. Calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}\left(1-\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\right)^{(n+1)^{\frac{5}{2}}}}{3^n\left(1-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)^{n^{\frac{5}{2}}}}=3\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\right)^{(n+1)^{\frac{5}{2}}}}{\left(1-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)^{n^{\frac{5}{2}}}}=$$

Serviamoci dell'identità esponenziale e scriviamo:

$$=3\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{(n+1)^{\frac{5}{2}}\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\right)}}{e^{n^{\frac{5}{2}}\ln\left(1-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}}=$$

Consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor del logaritmo naturale in un intorno di *x=0*:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

Ci arrestiamo al primo termine e, dato che $-\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\to 0 \; per \; n\to+\infty$, possiamo scrivere:

$$\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\right)\sim-\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Analogamente:

$$\ln\left(1-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\sim-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Sostituendo si trova:

$$=3\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{(n+1)^{\frac{5}{2}}\left(-\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\right)}}{e^{n^{\frac{5}{2}}\left(-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}}=3\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-\frac{(n+1)^{\frac{5}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}}}{e^{-\frac{n^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}}}}=3\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-(n+1)^{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}}}{e^{-n^{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}}}=3\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-(n+1)}}{e^{-n}}=$$

$$=3\lim_{n\to+\infty}e^{-n-1+n}=3e^{-1}\cong 1.11>1$$

La serie diverge.

Matilde Consales