Esercizio 8

Si studi il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\log n}{\sqrt{n}}$$

Svolgimento

Si tratta di una serie a segni alterni quindi possiamo applicare il criterio di Leibniz. Vediamo se sono verificate le ipotesi:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{\sqrt{n}} =$$

Ci troviamo di fronte ad una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ applichiamo il teorema di De l'Hospital:

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2\sqrt{n}}{n}}{\frac{n}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}}{1} = 0$$

La prima ipotesi è verificata: $\{a_n\}$ è infinitesima.
Adesso dobbiamo vedere se $\{a_n\}$ è una successione non crescente cioè se esiste un indice n_0 tale che:

$$per\ ogni\ n > n_0 \quad risulta \quad a_{n+1} \le a_n$$

Per vederlo ci conviene considerare la funzione:

$$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$$

E vedere se è crescente o decrescente. Calcoliamo, allora, la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\log x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x}\log x}{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}(2 - \log x)}{x^2} < 0$$

Il segno della derivata prima dipende da un solo fattore (gli altri due sono sempre positivi). Troviamo le soluzioni della disequazione:

$$2 - \log x < 0 \qquad \log x > 2 \quad x > e^2 \cong 7.39$$

Ma allora la successione $\left\{\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right\}$ è decrescente per $n>8$. Tutte e due le ipotesi sono verificate quindi la serie proposta converge semplicemente.

Per vedere se converge assolutamente consideriamo la serie dei valori assoluti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log n}{\sqrt{n}}$$

Osserviamo che $\log n > 1 \quad se \quad n > 3$. Possiamo scrivere:

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{\log n}{\sqrt{n}} > \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

A secondo membro compare la serie armonica generalizzata con $\alpha < 1$ che diverge.

Concludiamo che la serie data converge semplicemente ma non assolutamente.

Matilde Consales