Esercizio 1

Studiare l'andamento della funzione algebrica razionale:

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x - 5}$$

Svolgimento

Passo 1. Il Campo di esistenza.
Deve essere:

$$x^2 - 4x - 5 \neq 0$$

Risolviamo l'equazione:

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x_{1-2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - (-5)} = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm \sqrt{9} = 2 \pm 3$$

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = -1$$

$$C.E. = \{x \epsilon R: x \neq -1 \,, x \neq 5\}$$

Passo 2. Il segno.
Poniamo:

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x - 5} \geq 0$$

Risolviamo l'equazione:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1-2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 1$$

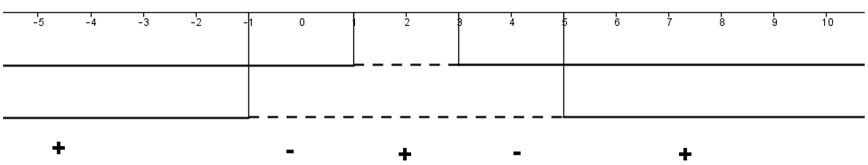
Si trova:

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad x \leq 1, \quad x \geq 3$$

Per il denominatore si ha:

$$x^2 - 4x - 5 > 0 \qquad \rightarrow \qquad x < -1, \quad x > 5$$

Facciamo il grafico:



La funzione data è positiva per:

$$x < -1, 1 \leq x \leq 3, x > 5$$

Passo 3. L’intersezione con gli assi.
Asse x:
Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x - 5} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x - 5} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

La funzione data interseca l’asse delle ascisse in due punti:

$$A = (1,0) \qquad B = (3,0)$$

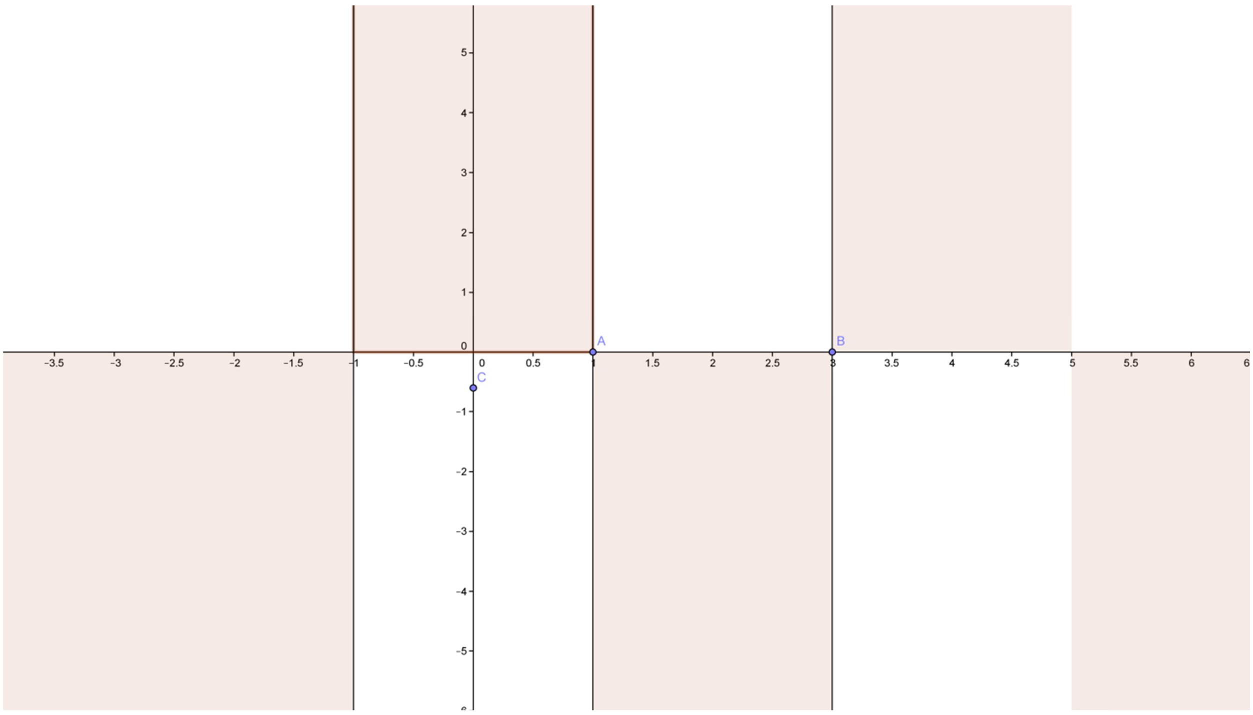
Asse y:
Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x - 5} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{3}{5} \\ x = 0 \end{cases}$$

La funzione interseca l’asse delle ordinate nel punto:

$$C = \left(0, -\frac{3}{5}\right)$$

Possiamo cominciare a riportare i punti di intersezione ed il segno sul sistema di assi cartesiani.



Passo 4. Gli asintoti: i limiti.
Asintoti orizzontali:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x - 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{x^2}{x^2} - \dfrac{4x}{x^2} + \dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2} - \dfrac{4x}{x^2} - \dfrac{5}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+3}{x^2-4x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}=1$$

La retta y=1 è asintoto orizzontale.

Asintoti verticali:

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-4x+3}{x^2-4x-5}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2-4x+3}{x^2-4x-5}=-\infty$$

La retta x=-1 è asintoto verticale.

$$\lim_{x\to5^-}\frac{x^2-4x+3}{x^2-4x-5}=-\infty$$

$$\lim_{x\to5^-}\frac{x^2-4x+3}{x^2-4x-5}=+\infty$$

La retta x=5 è asintoto verticale.

Asintoti obliqui:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+3}{x(x^2-4x-5)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+3}{x^3-4x^2-5x}=0$$

Non esiste l’asintoto obliquo.

<u>Passo 5</u>. Intersezione con gli asintoti.
Vediamo se la funzione interseca l’asintoto orizzontale y=1 risolvendo il sistema:

$$\begin{cases}y=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x-5}\\ y=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}1=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x-5}\\ y=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3-x^2+4x-5}{x^2-4x-5}=0\\ y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{-2}{x^2-4x-5}=0\\ y=1\end{cases}$$

Il sistema non ha soluzioni: la funzione non interseca l’asintoto orizzontale.

<u>Passo 6</u>. Crescenza e decrescenza: la derivata prima.

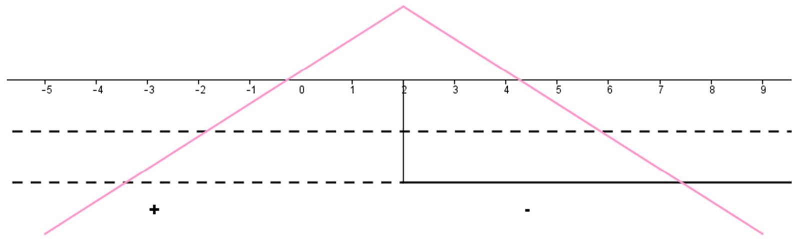
$$f'(x)=\frac{(2x-4)(x^2-4x-5)-(2x-4)(x^2-4x+3)}{(x^2-4x-5)^2}=$$

$$=\frac{(2x-4)(x^2-4x-5-x^2+4x-3)}{(x^2-4x-5)^2}=\frac{-8(2x-4)}{(x^2-4x-5)^2}=\frac{-16(x-2)}{(x^2-4x-5)^2}$$

Il segno della derivata prima:

$$\frac{-16(x-2)}{(x^2-4x-5)^2}>0$$

$$x - 2 > 0 \qquad x > 2$$



La funzione è crescente per x<2 e decrescente per x>2.

$$f(2) = \frac{2^2 - 4 \cdot 2 + 3}{2^2 - 4 \cdot 2 - 5} = \frac{4 - 8 + 3}{4 - 8 - 5} = \frac{1}{9}$$

Il punto:

$$P = \left(2, \frac{1}{9}\right)$$

È un massimo relativo.

Passo 7. Concavità e convessità: la derivata seconda.

$$y'' = \frac{-16(x^2 - 4x - 5)^2 - 2(x^2 - 4x - 5)(2x - 4)(-16)(x - 2)}{(x^2 - 4x - 5)^4} =$$

$$= \frac{(x^2 - 4x - 5)[-16(x^2 - 4x - 5) + 64(x - 2)^2]}{(x^2 - 4x - 5)^4} = \frac{-16x^2 + 64x + 80 + 64(x^2 - 4x + 4)}{(x^2 - 4x - 5)^3} =$$

$$= \frac{16(-x^2 + 4x + 5 + 4x^2 - 16x + 16)}{(x^2 - 4x - 5)^3} = 16\frac{3x^2 - 12x + 21}{(x^2 - 4x - 5)^3} = 48\frac{x^2 - 4x + 7}{(x^2 - 4x - 5)^3}$$

Studiamo il segno della derivata seconda.
Numeratore:

$$x^2 - 4x + 7 > 0$$

Risolviamo l'equazione:

$$x^2 - 4x + 7 = 0$$

$$x_{1-2} = 2 \pm \sqrt{4 - 7} = 2 \pm \sqrt{-3}$$

Non ha soluzione nel campo dei numeri reali.

Denominatore:

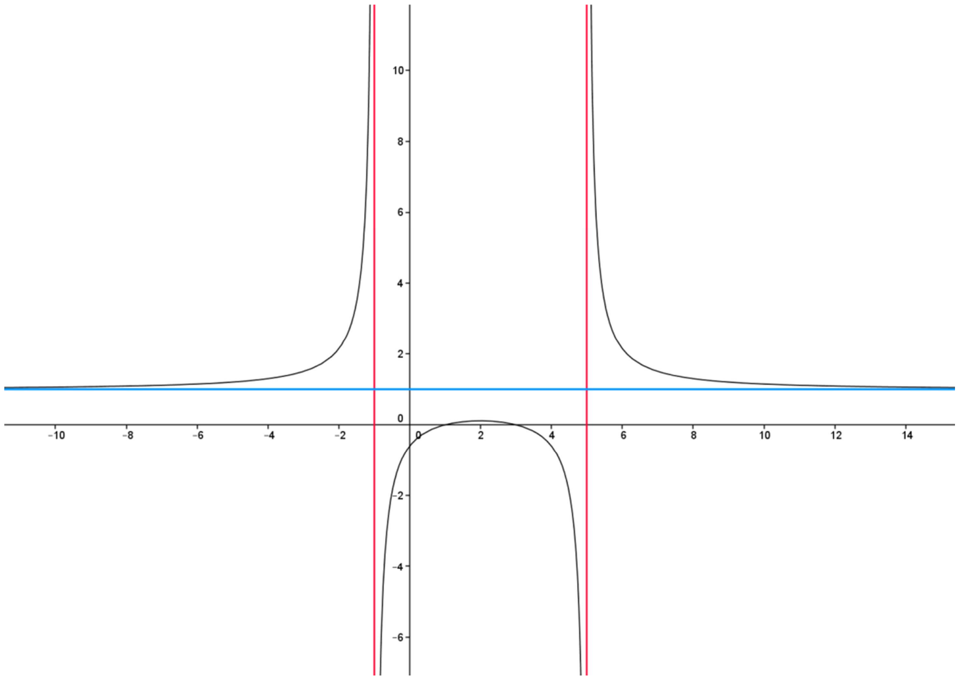
$$x^2 - 4x - 5 > 0 \qquad \rightarrow \qquad x < -1, \quad x > 5$$

Vedi punto 2.
Ma allora:

- per x<-1 la funzione è convessa;
- per -1<x<5 la funzione è concava;
- per x>5 la funzione è convessa.

La derivata seconda non si annulla mai quindi non sono presenti punti di flesso.

A questo punto possiamo disegnare la funzione.



Questo file può essere scaricato gratuitamente. Se pubblicato citare la fonte.

Matilde Consales